www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2026

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$
- $\mathcal{D}f=]0;+\infty[$
- f est deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE A

1. a. Déterminons les limites de f en " 0^+ " et en " $+\infty$ ":

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

$=0$, d'après les croissances comparées (cours).

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

$= -\infty$, d'après le cours.

Ainsi les limites de f en 0^+ et en $+\infty$ sont : $-\infty$ et 0.

1. b. Interprétation :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ signifie que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ signifie que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. Calculons f' sur $]0 ; +\infty[$:

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (x^2) - \ln(x) \times (2x)}{x^4}$$

$$\left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$$

$$= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

3. Dressons le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$:

Sur $]0\ +\infty[$, $x^3 > 0$.

Donc le signe de f' dépend uniquement du signe de $1 - 2\ln(x)$.

Distinguons deux cas:

- $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$ ssi $\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ cad ssi $x \leqslant e^{0,5}$,
- $1 - 2\ln(x) \leqslant 0$ ssi $\ln(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ cad ssi $x \geqslant e^{0,5}$.

Ainsi: • f est croissante sur $]0;e^{0,5}]$

• f est décroissante sur $[e^{0,5};+\infty[$.

D'où le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$ est:

x	0		$e^{0,5}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$f(e^{0,5})$	↘	0

, $f(e^{0,5}) = \dfrac{1}{2e}$.

Freemaths : Tous droits réservés

La fonction f admet comme extremum le point: $R\left(e^{0,5}; \frac{1}{2e}\right)$.

R est un maximum pour f sur $\mathcal{D}f$.

4. Déterminons l'équation réduite de la droite Δ:

La droite Δ correspond à la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A (1; 0).

L'équation réduite de Δ s'écrit: $y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$

$\iff y = f'(1) \times (x - 1) + 0$

cad $y = x - 1$.

L'équation réduite de la droite Δ est: $y = x - 1$.

5. Calculons f'' sur $]0; +\infty[$:

D'après l'énoncé, f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{2}{x}\right) \times (x^3) - (1 - 2\ln(x)) \times (3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln(x)}{x^6}$$

$$= \frac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons bien: $f''(x) = \dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6. a. Étudions la convexité de f:

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à cette question, nous allons étudier le signe de f'' sur $]0;+\infty[$.

Comme $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 0 \iff -5+6\ln(x) = 0$

$$\iff \ln(x) = \frac{5}{6}$$

cad $x = e^{5/6}$.

Ainsi: • $f''(x) \geqslant 0$ sur $[e^{5/6};+\infty[$ et donc f est convexe sur $[e^{5/6};+\infty[$

• $f''(x) \leqslant 0$ sur $[0;e^{5/6}[$ et donc f est concave sur $]0;e^{5/6}]$.

La valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion est: $x = e^{5/6}$.

Il s'agit en fait du point de coordonnées: $(e^{5/6}; f(e^{5/6}))$.

6. b. Déduisons-en que pour tout $x \in]0;e^{5/6}]$, $x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$:

La fonction f est concave sur $]0;e^{5/6}]$.

$\mathcal{C}_f$ est donc au-dessous de toutes ses tangentes et, en particulier, au-dessous de Δ.

Freemaths : Tous droits réservés

Nous pouvons ainsi écrire: $x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. $(\Delta \geqslant f(x))$

PARTIE B

1. Donnons une interprétation graphique de I_n:

Pour tout entier naturel non nul n: $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

I_n est égale à l'aire (en unité d'aire) de la surface délimitée par:

- La courbe $\mathcal{C}_f$
- l'axe des abscisses
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2. Démontrons que la suite (I_n) est croissante:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous devons montrer que: $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx - \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

$$= \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx + \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx - \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

Or sur $[1;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

Donc $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$ et par conséquent sur $\mathbb{N}^*$: la suite (I_n) est croissante.

3. Recopions et complétons le script:

Le script recopié et complété est le suivant:

```
S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
  S = S + log(i)/(i**2)
print(S)
```

4. À l'aide d'une IPP, calculons I_n:

Ici: $I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

Procédons à une IPP.

Freemaths : Tous droits réservés

Posons: • $U(x) = \ln(x)$, d'où $U'(x) = \frac{1}{x}$

• $V'(x) = \frac{1}{x^2}$, d'où $V(x) = -\frac{1}{x}$.

Dans ces conditions: $I_n = \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) dx$

$$= -\frac{\ln(n)}{n} - \int_1^n -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$$

$$= \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}.$$

Ainsi nous avons bien: $I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$.

5. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

$$= 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= 1 - 0 - 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, d'après le cours.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Freemaths : Tous droits réservés