Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 8

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \to C\, e^{ax} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Déterminons a, b et c pour que " g " soit bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons: $g'(x) = 2ax + b$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) + 3\,g(x) = 6x^2 + 7x - 2 \iff (2ax + b) + (3ax^2 + 3bx + 3c) = 6x^2 + 7x - 2$$

$$\iff x^2(3a) + x(2a + 3b) + (b + 3c) = 6x^2 + 7x - 2.$$

Par identification, nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} 3a = 6 \\ 2a + 3b = 7 \\ b + 3c = -2 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Ainsi, " g " est bien une solution particulière de (E) avec:

$$g(x) = 2x^2 + x - 1.$$

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' + 3y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $y' + 3y = 0$ sont:

$$h_1(x) = C.e^{-3x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' + 3y = 6x^2 + 7x - 2$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x)$ cad $h(x) = C.e^{-3x} + 2x^2 + x - 1,\ C \in \mathbb{R}.$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que $h(3) = 1$:

$h(3) = 1 \iff C.e^{-9} + 20 = 1$

$\iff C = -19\,e^9.$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(3) = 1$ est:

$$h(x) = (-19\,e^9)\,.\,e^{-3x} + 2x^2 + x - 1.$$