Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$

7

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in IR$) sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C e^{ax} + g(x)$, $C \in IR$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{20}{9} - \frac{1}{2}e^{3x}$, pour tout $x \in IR$.

g est dérivable sur IR, et nous avons: $g'(x) = 2x - \frac{2}{3} - \frac{3}{2}e^{3x}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$:

$$\frac{g'(x)}{3} + g(x) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9} - \frac{1}{2}e^{3x}\right) + \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{20}{9} - \frac{1}{2}e^{3x}\right)$$

$$= x^2 + 2 - e^{3x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in IR$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $\frac{y'}{3} + y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $\frac{y'}{3} + y = 0$ sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{-3x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de l'équation $\frac{y'}{3} + y = x^2 + 2 - e^{3x}$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x) =$ cad $h(x) = C \cdot e^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{20}{9} - \frac{1}{2}e^{3x},\ C \in \mathbb{R}.$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que h(0) = 0:

$$h(0) = 0 \iff C \cdot e^0 + \frac{20}{9} - \frac{1}{2}e^0 = 0$$

$$\iff C + \frac{20}{9} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\iff C = -\frac{31}{18}.$$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que h(0) = 0 est:

$$h(x) = -\frac{31}{18} \cdot e^{-3x} + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{20}{9} - \frac{1}{2}e^{3x}.$$