Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$

3

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C\,e^{ax} + g\,(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g\,(x) = 5\,x^2 - 4\,x + 3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons: $g'\,(x) = 10x - 4$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2\,g'\,(x) + 5g(x) = 2\,(10x - 4) + 5\,(5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 20\,x - 8 + 25\,x^2 - 20x + 15$$

$$= 25x^2 + 7.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $2y' + 5y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $2y' + 5y = 0$ sont:

$$h_1(x) = C.e^{\frac{-5}{2}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $2y' + 5y = 25x^2 + 7$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x)$ cad $h(x) = C.e^{\frac{-5}{2}x} + (5x^2 - 4x + 3),\ C \in \mathbb{R}.$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 6$:

$h(2) = 6 \iff C.e^{-5} + 15 = 6$

$\iff C = -9\,e^{5}.$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 6$ est:

$$h(x) = -9\,e^{\frac{-5}{2}x+5} + (5x^2 - 4x + 3).$$