Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 1

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \to C \cdot e^{ax} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = -x - 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons: $g'(x) = -1$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) - \frac{1}{2} g(x) = -1 - \frac{1}{2}(-x - 2)$$

$$= \frac{1}{2} x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' = \frac{1}{2} y$:

Les solutions générales de l'équation $y' = \frac{1}{2} y$ sont:

Freemaths : Tous droits réservés

$$h_1(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x)$ cad $h(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-x-2),\ C \in \mathbb{R}.$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que h (2) = 0:

$h(2) = 0 \iff C \cdot e + (-2-2) = 0$

$\iff C = \frac{4}{e}.$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que h (2) = 0 est:

$$h(x) = \frac{4}{e} \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x - 2.$$

Freemaths : Tous droits réservés