

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Équations **Différentielles**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUTRE $y' = ay + b$

4

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$)

sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C \cdot e^{ax} + \frac{-b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

1. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y' = 4y - 5$, avec $y(2) = \frac{1}{4}$:

Ici, l'équation différentielle s'écrit: $y' = 4y - 5$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4y$ sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{4x}, C \in \mathbb{R}.$$

- Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 4y - 5$ est:

$$h_2(x) = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

Dans ces conditions, les fonctions solutions de $y' = 4y - 5$ sont:

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) \text{ cad } h(x) = C \cdot e^{4x} + \frac{5}{4}, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or: } y(2) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow h(2) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow C \cdot e^8 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow C \cdot e^8 = -1$$

$$\Leftrightarrow C = -e^{-8}.$$

Au total, la solution générale de $y' = 4y - 5$ est:

$$h(x) = -e^{4x-8} + \frac{5}{4}.$$

2. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y' = 3y - 6$, avec $y(-1) = -3$:

Ici, l'équation différentielle s'écrit: $y' = 3y - 6$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{3x}, C \in \mathbb{R}.$$

- Une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 3y - 6$ est:

$$h_2(x) = -\frac{b}{a} = 2.$$

Dans ces conditions, les fonctions solutions de $y' = 3y - 6$ sont:

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) \text{ cad } h(x) = C \cdot e^{3x} + 2, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or: } y(-1) = -3 \Leftrightarrow C \cdot e^{-3} + 2 = -3$$

$$\Leftrightarrow C \cdot e^{-3} = -5$$

$$\Leftrightarrow C = -5e^3.$$

Au total, la solution générale de $y' = 3y - 6$ est:

$$h(x) = -5e^{3x+3} + 2.$$