

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE

2

ÉNONCÉ

Partie A: établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on définit la fonction f par: $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$: $\ln(x + 1) \leq x$.

Partie B: application à l'étude d'une suite

On pose $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n - \ln(1 + U_n)$.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de U_2 .
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n \geq 0$.
b. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n : $U_n \leq 1$.
c. Montrer que la suite (U_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (U_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de ℓ .
4. a. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (U_n)

sont inférieurs à 10^{-p} .

b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (U_n) sont inférieurs à 10^{-15} .