www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LES POINTS INVARIANTS 1

CORRECTION

1. Développons la quantité $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$:

$$(z + 1 - i)(z - 1 - i) = z^2 - z - iz + z - 1 - i - iz + i + i^2$$

$$= z^2 - 2 - 2iz.$$

Ainsi: $(z + 1 - i)(z - 1 - i) = z^2 - 2 - 2iz$.

2. Trouvons les points invariants M tels que $f(M) = M$:

Il s'agit ici de déterminer l'ensemble des points invariants par f.

Ils sont tels que: $f(M) = M$, avec $f(z) = \dfrac{i(z - 2i)}{z - i}$ et $z \neq i$.

$$f(M) = M \iff z = \frac{i(z - 2i)}{z - i}, \text{ avec } z \neq i$$

$$\iff z(z - i) = i(z - 2i)$$

$$\iff z^2 - iz = iz - 2i^2$$

$$\iff z^2 - 2 - 2iz = 0$$

$$\iff (z + 1 - i)(z - 1 - i) = 0, \text{ d'après question 1.}$$

$$\iff (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, nous avons 2 points invariants: $A(z_A = -1 + i)$ et $B(z_B = 1 + i)$.

3. Écrivons les affixes des points A et B sous formes trigonométrique et exponentielle :

D'après la question précédente, nous savons que les 2 points invariants écrits sous forme algébrique sont:

- $A(z_A)$ avec $z_A = -1 + i$
- $B(z_B)$ avec $z_B = 1 + i$.

Dans ces conditions, sous forme trigonométrique les affixes des points A et B s'écrivent:

- $z_A = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$
- $z_B = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Et sous forme exponentielle, z_A et z_B s'écrivent:

- $z_A = \sqrt{2} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$
- $z_B = \sqrt{2} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

4. Montrons que pour tout $z \neq i$, $z' - i = \frac{1}{z - i}$:

Pour tout $z \neq i$: $\quad z' - i = \frac{i(z - 2i)}{z - i} - i$

$$= \frac{i(z - 2i) - i(z - i)}{z - i}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \frac{iz + 2 - iz - 1}{z - i}$$

$$= \frac{1}{z - i}.$$

Ainsi, pour tout $z \neq i$, nous avons bien: $z' - i = \dfrac{1}{z - i}.$

Freemaths : Tous droits réservés