Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA CIBLE...

CORRECTION

1. a. a1. Donnons la forme trigonométrique et la forme exponentielle de " j ":

D'après l'énoncé: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Le module de j est: $|j| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$ => $|j| = 1$.

- Soit θ, l'argument de j:

$$j = 1\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 1 \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • L'argument et le module de **j** sont:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } |j| = 1.$$

- Sous forme trigonométrique **j** s'écrit: $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- Sous forme exponentielle **j** s'écrit: $j = 1 \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. a. a2. Déduisons-en les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c':

• D'après l'énoncé: • $a = -4$, $b = 2$ et $c = 4$,

• $a' = j\,a$, $b' = j\,b$ et $c' = j\,c$,

• $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.

Dans ces conditions: • $a' = -4 \times \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ => $a' = 2 - i\,(2\sqrt{3})$,

• $b' = 2 \times \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ => $b' = -1 + i\,\sqrt{3}$,

• $c' = 4 \times \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ => $c' = -2 + i\,(2\sqrt{3})$.

Ainsi les formes algébriques de a', b' et c' sont respectivement:

$a' = 2 - i\,(2\sqrt{3})$, $b' = -1 + i\,\sqrt{3}$ et $c' = -2 + i\,(2\sqrt{3})$.

• Sous forme exponentielle a, b et c s'écrivent:

• $a = -4$ => $a = 4\,e^{i\pi}$,

• $b = 2$ => $b = 2\,e^{i \times 0}$,

• $c = 4$ => $c = 4\,e^{i \times 0}$.

Dans ces conditions, sous forme exponentielle a', b', et c' s'écrivent:

• $a' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 4\,e^{i\pi}$ => $a' = 4\,e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$,

• $b' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2\,e^{i \times 0}$ => $b' = 2\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$,

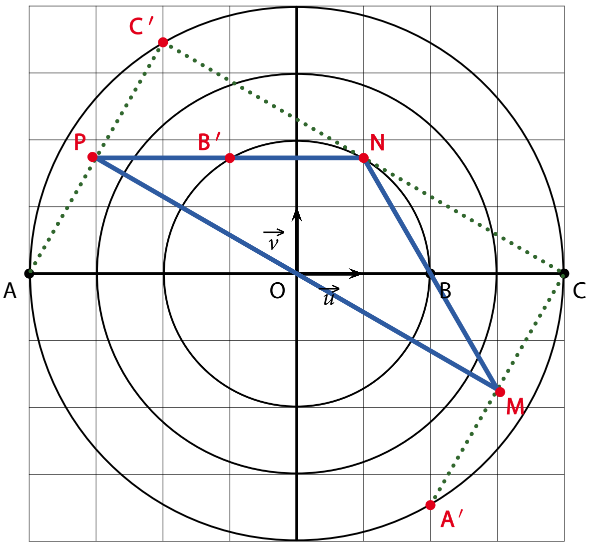
• $c' = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 4\,e^{i \times 0}$ => $c' = 4\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

Au total les formes exponentielles de a', b' et c' sont respectivement:

$$a' = 4\, e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)},\ b' = 2\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \text{ et } c' = 4\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

1. b. Plaçons les points A', B' et C' sur le graphique:

Voici le graphique de l'Annexe sur lequel figurent les points A', B' et C':



2. Montrons que les points A', B' et C' sont alignés:

Les points A', B' et C' sont alignés ssi: $\dfrac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} \in \mathbb{R}$.

Or ici: • $z_{A'} = a' = j \cdot a$, avec: $a = -4$,

• $z_{B'} = b' = j \cdot b$, avec: $b = 2$,

• $z_{C'} = c' = j \cdot c$, avec: $c = 4$.

Dans ces conditions: $\dfrac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \dfrac{4j + 4j}{2j + 4j} = \dfrac{8}{6} \in \mathbb{R}$.

Ainsi comme $\dfrac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} \in \mathbb{R}$, nous pouvons affirmer que:

les points A', B' et C' sont bien alignés.

3. Démontrons que le triangle MNP est isocèle:

D'après l'énoncé:
- M est le milieu du segment [A'C],
- N est le milieu du segment [C'C],
- P est le milieu du segment [C'A].

Dans ces conditions, les affixes des points M, N et P sont:

- **Pour M**: $z_M = \dfrac{a' + c}{2} \Rightarrow z_M = 2 + 2\,e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \mathbf{3 - i\sqrt{3}}$,

- **Pour N**: $z_N = \dfrac{c' + c}{2} \Rightarrow z_N = 2 + 2\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \mathbf{1 + i\sqrt{3}}$,

- **Pour P**: $z_P = \dfrac{c' + a}{2} \Rightarrow z_P = -2 + 2\,e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \mathbf{-3 + i\sqrt{3}}$.

Or, d'après le cours, le triangle MNP est isocèle en N ssi: **NM = NP**.

Ici:
- $NM = |z_M - z_N| \Rightarrow NM = 4$,
- $NP = |z_P - z_N| \Rightarrow NP = 4$.

Au total: le triangle MNP est bien isocèle en N.