# Maths Expertes
## Terminale

## Nombres Complexes
## Forme Trigonométrique

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# FORME TRIGONOMÉTRIQUE 4

## CORRECTION

1. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ :

Posons : $x = 1 + i$ et $y = 1 - i$.

• Le module de $x$ est : $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $x = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or : $x = 1 + i$.

D'où : $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi : $x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

• Le module de $y = 1 - i$ est : $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions : $(1 - i) = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ -1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi: $y = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

- D'où: $z = \dfrac{x^5}{y^3} \iff z = \dfrac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^5}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right]^3}$

$$= \frac{(\sqrt{2})^5\left[\cos\left(5\times\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\times\dfrac{\pi}{4}\right)\right]}{(\sqrt{2})^3\left[\cos\left(3\times\dfrac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(3\times\dfrac{-\pi}{4}\right)\right]}$$

$$= (\sqrt{2})^2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$.

2. Écrivons sous forme trigonométrique $z = (1+i)^8(1-\sqrt{3}i)^{-6}$:

Posons: $x = 1 + i$ et $y = 1 - \sqrt{3}i$.

• Le module de $x$ est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $x = \sqrt{2}\ (\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $x = 1 + i$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Ainsi**: $x = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

• Le module de $y$ est: $r = 2$.

Dans ces conditions: $y = 2\ (\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $y = 1 - \sqrt{3}\,i$.

D'où: $\begin{cases} 1 = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Ainsi**: $y = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

• D'où: $z = x^8 \times y^{-6} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^8 \times \left[2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{-6}$

$$= (\sqrt{2})^8 \times (2)^{-6} \times \left[ \cos\left(8 \times \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \times \frac{\pi}{4}\right) \right] \times$$

$$\left[ \cos\left(-6 \times \frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(-6 \times \frac{-\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \cos(2\pi + 2\pi) + i \sin(2\pi + 2\pi) \right].$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = \frac{1}{4}(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)$.



3. Écrivons sous forme trigonométrique $z = -1 + \sqrt{3}\,i$:

Le module de z est: $r = 2$.

Dans ces conditions: $z = 2\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $z = -1 + \sqrt{3}\,i$.

D'où: $\begin{cases} -1 = 2\cos\theta \\ \sqrt{3} = 2\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

En effet: $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$.