Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FORME TRIGONOMÉTRIQUE 3

CORRECTION

1. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \sqrt{3} + 3i$:

Le module de z est: $r = \sqrt{12}$ cad $r = 2\sqrt{3}$.

Dans ces conditions: $z = 2\sqrt{3}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $z = \sqrt{3} + 3i$.

D'où: $\begin{cases} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cos\theta \\ 3 = 2\sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Écrivons sous forme trigonométrique $z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$:

Posons $z = z_1 \times z_2$, avec: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + 3i$.

• Le module de $z_1 = 1 - i$ est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $(1 - i) = \sqrt{2}\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta_1 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\theta_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

• De plus, le module de z_2 est: $r = \sqrt{12}$ cad $r = 2\sqrt{3}$.

Dans ces conditions: $z_2 = 2\sqrt{3}\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

D'où: $\begin{cases} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\cos\theta_2 \\ 3 = 2\sqrt{3}\sin\theta_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi: $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

• D'où: $z = z_1 \times z_2$

$$= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] \times \left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2}) \times (2\sqrt{3}) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

(car: $[r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \times [r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$= (r_1 \times r_2) [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$)

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$

3. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3$:

Posons: $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

- Le module de x est: $r = 1.$

Dans ces conditions: $x = 1 (\cos\theta + i\sin\theta).$

Or: $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

D'où: $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta \end{cases}$ cad $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

- D'où: $z = x^3 \iff z = \left[1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^3$

$$= (1)^3 \left(\cos\left(3 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(3 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right).$$

(car d'après la formule de Moivre:

$$[\,r\,(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\,]^n = r^n\,[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]).$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 1\,(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$.