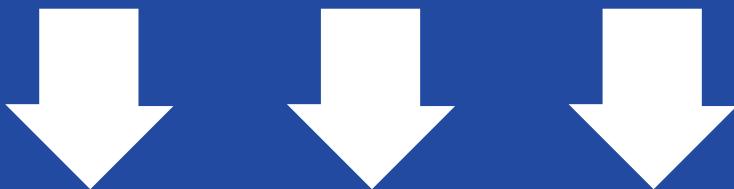


Maths Expertes

Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FORME TRIGONOMÉTRIQUE

3

CORRECTION

1. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \sqrt{3} + 3i$:

Le module de z est: $r = \sqrt{12}$ cad $r = 2\sqrt{3}$.

Dans ces conditions: $z = 2\sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $z = \sqrt{3} + 3i$.

$$\text{D'où: } \begin{cases} \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cos\theta \\ 3 = 2\sqrt{3} \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{cad } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

2. Écrivons sous forme trigonométrique $z = (1 - i)(\sqrt{3} + 3i)$:

Posons $z = z_1 \times z_2$, avec: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + 3i$.

- Le module de $z_1 = 1 - i$ est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $(1 - i) = \sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$\text{D'où: } \begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \theta, \\ -1 = \sqrt{2} \sin \theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ cad } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ainsi: } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

- De plus, le module de z_2 est: $r = \sqrt{12}$ cad $r = 2\sqrt{3}$.

Dans ces conditions: $z_2 = 2\sqrt{3} (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

$$\text{D'où: } \begin{cases} \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cos \theta_2, \\ 3 = 2\sqrt{3} \sin \theta_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ cad } \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ainsi: } z_2 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

- D'où: $z = z_1 \times z_2$

$$= \left[\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \times \left[2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= (\sqrt{2}) \times (2\sqrt{3}) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

(car: $[r, (\cos\theta, +i\sin\theta)] \times [r_2, (\cos\theta_2, +i\sin\theta_2)]$

$$= (r \times r_2) [\cos(\theta, +\theta_2) + i \sin(\theta, +\theta_2)]$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

3. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^3$:

Posons: $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- Le module de x est: $r = 1$.

Dans ces conditions: $x = 1 (\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

D'où: $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta \end{cases}$ cad $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• D'où: $z = x^3 \iff z = \left[1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \right]^3$

$$= (1)^3 \left(\cos\left(3 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(3 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \right).$$

(car d'après la formule de Moivre:

$$[r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)].$$

Au total, sous forme trigonométrique: $z = l(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$.