Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FORME TRIGONOMÉTRIQUE 1

CORRECTION

1. Écrivons sous forme trigonométrique $z = 1 + i$:

Le module de z est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $z = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $z = 1 + i$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ <=> $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Au total, sous forme trigonométrique: $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$:

Le module de z est: $r = 1$.

Dans ces conditions: $z = 1\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Or: $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

D'où: $\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \cos\theta \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta \end{cases}$ cad $\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

3. Écrivons sous forme trigonométrique $z = \dfrac{(1-i)}{(1+i)}$:

Posons: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, avec: $z_1 = (1-i)$ et $z_2 = (1+i)$.

- Le module de $z_1 = 1 - i$ est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $(1-i) = \sqrt{2}\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta_1 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\theta_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

- De plus, le module de $z_2 = (1+i)$ est: $r = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $(1+i) = \sqrt{2}\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

D'où: $\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta_2 \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta_2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

• D'où: $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ <=> $z = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

$$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

(car: $\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$)

Au total, sous forme trigonométrique: $z = 1\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.