Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

CORRECTION

1. Écrivons z_1 et $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique:

1. a. En ce qui concerne z_1:

$$z_1 = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Or: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Dans ces conditions: $z_1 = -2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cad $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$.

Ainsi, sous forme algébrique: $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$.

1. b. En ce qui concerne $z_1 \times z_2$:

$z_2 = -1 + i.$

Dans ces conditions: $z_1 \times z_2 = (-1 - i\sqrt{3})(-1 + i)$

$$= 1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$= (1 + \sqrt{3}) + i\,(-1 + \sqrt{3}).$

Ainsi, sous forme algébrique: $z_1 \times z_2 = (1 + \sqrt{3}) + i\,(-1 + \sqrt{3}).$

2. Déterminons les écritures trigonométriques de z_1, z_2 et $z_1 \times z_2$:

2. a. En ce qui concerne z_1:

$z_1 = -1 - i\sqrt{3}.$

• Le module de z_1 est: $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$ cad $r = 2.$

• Dans ces conditions: $z_1 = 2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).$

Or: $z_1 = -1 - \sqrt{3}i.$

D'où: $\begin{cases} -1 = 2\cos\theta_1 \\ -\sqrt{3} = 2\sin\theta_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_1 = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• Ainsi: $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right).$

2. b. En ce qui concerne z_2:

$z_2 = -1 + i.$

• Le module de z_2 est: $r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$ cad $r_2 = \sqrt{2}.$

• Dans ces conditions: $z_2 = \sqrt{2}\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$

Or: $z_2 = -1 + i$.

D'où: $\begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta_2 \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_2 = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

• Ainsi: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2. c. En ce qui concerne $z_1 \times z_2$:

D'après le cours, nous savons que:

$$z_1 \times z_2 = [\,r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,] \times [\,r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,]$$

$$= (r_1 \times r_2)\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

D'où ici: $z_1 \times z_2 = \left[2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$

$$= (2 \times \sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Au total, la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$ est:

$$2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{12}\right)\right).$$

3. Déduisons-en la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$:

Préalablement, notons que: $\dfrac{25\pi}{12} = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Dans ces conditions: • $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

et: • $z_1 \times z_2 = (1 + \sqrt{3}) + i\,(-1 + \sqrt{3})$.

Ainsi par identification: • $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(1 + \sqrt{3})$,

• $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(-1 + \sqrt{3})$.

Ou encore: • $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

• $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.