Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$?

CORRECTION

1. Écrivons z_1 et $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique:

1. a. En ce qui concerne z_1:

$$z_1 = -3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Or: $\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Dans ces conditions: $z_1 = -3\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cad $z_1 = -\frac{3}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ainsi, sous forme algébrique: $z_1 = -\frac{3}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. b. En ce qui concerne $z_1 \times z_2$:

$z_2 = 2 - 2i$.

Dans ces conditions: $z_1 \times z_2 = \left(-\frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 2i)$

$= -3 + 3i + i\,(3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}$

$= (-3 + 3\sqrt{3}) + i\,(3 + 3\sqrt{3}).$

Ainsi, sous forme algébrique: $z_1 \times z_2 = (-3 + 3\sqrt{3}) + i\,(3 + 3\sqrt{3}).$

2. Déterminons les écritures trigonométriques de z_1, z_2 et $z_1 \times z_2$:

2. a. En ce qui concerne z_1:

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

• Le module de z_1 est: $r_1 = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ cad $r_1 = 3.$

• Dans ces conditions: $z_1 = 3\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).$

Or: $z_1 = -\frac{3}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$

D'où: $\begin{cases} -\frac{3}{2} = 3\cos\theta_1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sin\theta_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• Ainsi: $z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

2. b. En ce qui concerne z_2:

$z_2 = 2 - 2i.$

• Le module de z_2 est: $r_2 = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$ cad $r_2 = 2\sqrt{2}.$

• Dans ces conditions: $z_2 = 2\sqrt{2}\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$

Or: $z_2 = 2 - 2i.$

D'où: $\begin{cases} 2 = 2\sqrt{2}\cos\theta_2 \\ -2 = 2\sqrt{2}\sin\theta_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ cad $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

• Ainsi: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right).$

2. c. En ce qui concerne $z_1 \times z_2$:

D'après le cours, nous savons que:

$$z_1 \times z_2 = [\,r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,] \times [\,r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,]$$

$$= (r_1 \times r_2)\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

D'où ici: $$z_1 \times z_2 = \left[3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= (3) \times (2\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Au total, la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$ est:

$$6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

3. Déduisons-en la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

Nous avons donc: • $z_1 \times z_2 = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

et: • $z_1 \times z_2 = (-3 + 3\sqrt{3}) + i\,(3 + 3\sqrt{3})$.

Ainsi par identification: • $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-3 + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$,

• $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$.

Ou encore: • $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$,

• $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.