Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CONJUGUÉ ET MODULE 4

CORRECTION

1. Rappelons les propriétés des nombres complexes conjugués:

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z z'} = \overline{z}\ \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, avec $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$, avec $z \neq 0$.

2. a. Déterminons conjugué et module de A:

$$A = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i\right).$$

- Dans ces conditions: $\overline{A} = \overline{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i\right)}$

$$= \overline{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right)} - \overline{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i.$$

• De plus: $r(A) = r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}.$

Ainsi: • le conjugué de A s'écrit: $\overline{A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$

• le module de A est: $r(A) = \frac{\sqrt{5}}{4}.$

2. b. Déterminons conjugué et module de B:

$B = (4i - 1) + (3 - 2i)(1 - i).$

• Dans ces conditions: $\overline{B} = \overline{(4i - 1) + (3 - 2i)(1 - i)}$

$$= \overline{(4i - 1)} + \overline{(3 - 2i)} \times \overline{(1 - i)}$$

$$= (-1 - 4i) + (3 + 2i) \times (1 + i)$$

$$= i.$$

• De plus: $r(B) = r(-i) = \sqrt{(-1)^2}.$

Ainsi: • le conjugué de B s'écrit: $\overline{B} = i$

• le module de B est: $r(B) = 1.$

2. c. Déterminons conjugué et module de C:

$$C = \frac{1}{3+i}.$$

• Dans ces conditions: $\overline{C} = \overline{\left(\frac{1}{3+i}\right)}$

$$= \frac{1}{\overline{(3+i)}}$$

$$= \frac{1}{3-i}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

• De plus: $r\,(C) = r\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - i\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}.$

Ainsi: • le conjugué de C s'écrit: $\overline{C} = \frac{3}{\sqrt{10}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

• le module de C est: $r\,(C) = 1.$

2. d. Déterminons conjugué et module de D:

$$D = \frac{i\,(2-3i)}{(2+i)^2} \iff D = \frac{(3+2i)}{(2+i)^2}.$$

• Dans ces conditions: $\overline{D} = \overline{\left[\frac{(3+2i)}{(2+i)^2}\right]}$

$$= \frac{\overline{(3+2i)}}{\overline{(2+i)^2}}$$

$$= \frac{(3-2i)}{(2-i)^2}$$

$$= \frac{3-2i}{3-4i}$$

$$= \frac{(3-2i)(3+4i)}{25}$$

$$= \frac{17}{25} + i\left(\frac{6}{25}\right).$$

• De plus: $r(D) = r\left(\frac{17}{25} - i\left(\frac{6}{25}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{17}{25}\right)^2 + \left(-\frac{6}{25}\right)^2}.$

Ainsi: • le conjugué de D s'écrit: $\overline{D} = \frac{17}{25} + i\left(\frac{6}{25}\right)$

• le module de D est: $r(D) = \frac{\sqrt{13}}{5}.$