Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Algébrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉEL OU IMAGINAIRE PUR ? 6

CORRECTION

1. " A " est-il bien défini pour tous les nombres complexes z:

Ici: $A = \dfrac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1}$, avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$

$$= \frac{(x + iy)^2 - 2i}{(x + iy)(x - iy) + 1}$$

$$= \frac{x^2 - y^2 + 2ixy - 2i}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$= \frac{(x^2 - y^2) + i(2xy - 2)}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Comme pour tous les réels x et y, $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$: " A " est bien défini pour tous les nombres complexes z.

2. Montrons que " A " est réel ssi $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$:

$A = \dfrac{(x^2 - y^2) + i(2xy - 2)}{x^2 + y^2 + 1}$, d'après la question précédente.

- " A " est un nombre réel ssi: $\frac{2xy - 2}{x^2 + y^2 + 1} = 0$ cad ssi $xy = 1$.

- $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (2iy)(2x)$.

D'où: $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i \iff 4ixy = 4i \iff xy = 1$.

Ainsi, " A " est un nombre réel ssi: $xy = 1$ cad $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$.

3. Démontrons que " A " est un imaginaire pur ssi il existe un réel x tel que $z = x + ix$ ou $z = x - ix$:

$A = \frac{(x^2 - y^2) + i(2xy - 2)}{x^2 + y^2 + 1}$, d'après la question précédente.

Dans ces conditions, " A " est un imaginaire pur ssi:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 0 \iff x^2 - y^2 = 0 \iff x^2 = y^2 \text{ cad } x = y \text{ ou } x = -y.$$

D'où:
- si $x = y$, z s'écrit sous la forme $z = x + ix$,
- si $x = -y$, z s'écrit sous la forme $z = x - ix$.

Au total, " A " est bien un imaginaire pur ssi il existe un réel x tel que:

$$z = x + ix \text{ ou } z = x - ix.$$