Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Forme Algébrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉEL OU IMAGINAIRE PUR ? 10

CORRECTION

1. Déterminons l'ensemble de définition de z':

Ici: $z' = \dfrac{z^2 - 2i}{z\bar{z} + 1}$, avec $z = x + iy$.

Dans ces conditions, il faut que: $z\bar{z} + 1 \neq 0$.

Or: $z\bar{z} + 1 > 0$ pour tout nombre z car $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0$.

Ainsi: z' est défini quelque soit le nombre complexe z.

2. Montrons que z' est réel ssi $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$:

Nous avons:
- $z' = \dfrac{(x^2 - y^2)}{z\bar{z} + 1} + i\,\dfrac{(2xy - 2)}{z\bar{z} + 1}$
- $z - \bar{z} = 2iy$, d'après le cours
- $z + \bar{z} = 2x$, d'après le cours.

Dans ces conditions, z' est réel ssi: $2xy - 2 = 0$ cad ssi $xy = 1$.

Or: $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4ixy$.

Donc oui, z' est un nombre réel ssi: $(z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 4i$ (car: $xy = 1$).