Maths Expertes
Terminale

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

MINI COURS

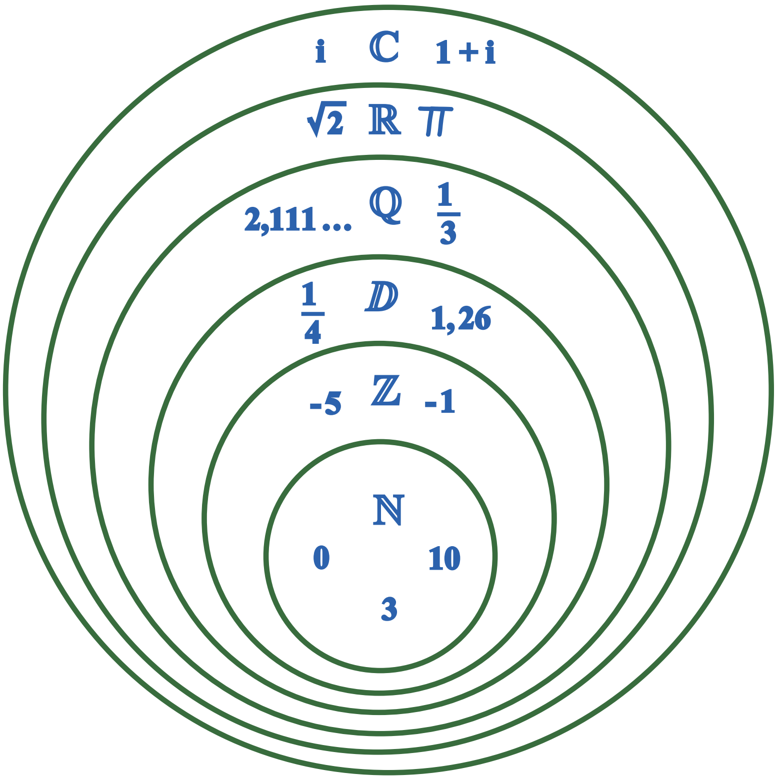
A. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$:

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, contenant $\mathbb{R}$ et pour lequel :

- **les règles de calcul restent les mêmes que dans $\mathbb{R}$,**
- **il existe un nombre réel dans $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$,**
- **tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + i \cdot y$ (où x et y sont réels),**
- **le nombre 0 s'écrit $0 + i \cdot 0$.**

2. Schéma :



B. Forme algébrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe z peut s'écrire **sous forme algébrique** :

$$z = x + i \cdot y, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. Propriétés :

- deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi :

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y',$$

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z + z' = (x + x') + i\,(y + y')$,
- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z \cdot z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx')$,

(car : $i^2 = -1$)

- x se nomme **la partie réelle de z** et se note Re (z),
- y se nomme **la partie imaginaire de z** et se note Im (z).

C. Réel ou imaginaire pur ?

Soit $z = x + i \cdot y$, un nombre complexe :

- le nombre z est dit **réel** si $y = 0$
- le nombre z est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

D. Conjugué d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre **conjugué** noté $\bar{z}$ avec : $\bar{z} = x - i \cdot y$.

2. Exemples :

- si $z = 2 + 3i$, alors : $\bar{z} = 2 - 3i$
- si $z = 2 + 4i$, alors : $\bar{z} = 2 - 4i$
- si $z = 3$, alors : $\bar{z} = 3$
- si $z = 7i$, alors : $\bar{z} = -7i$.

3. Relations :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$.

4. Propriétés :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

• z est un réel ssi $z = \bar{z}$

• z est un imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$

• $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

E. Module d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit $z = x + iy$. Le module de z, noté $r = |z|$, est le réel positif ou nul :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Exemples :

• si $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$

• si $z = 1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$

• si $z = 1 - i\sqrt{3}$: $|z| = 2$ cad $r = 2$.

3. Propriétés :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

• $|z| \geqslant 0$

• $|z| = 0 \iff z = 0$

• $|\alpha \cdot z| = \sqrt{\alpha^2} \cdot |z|$

• $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

- $|z| = |\bar{z}|$

- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$

- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

F. Ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 :

1. Définition :

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes **de module égal à 1** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| = 1\}.$$

2. Exemples :

- $z = 1$.

- $z = i$.

- $z = -i$.

- $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

G. Affixe d'un point :

1. Définition :

Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan par un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$: **z est appelé affixe du point M.**

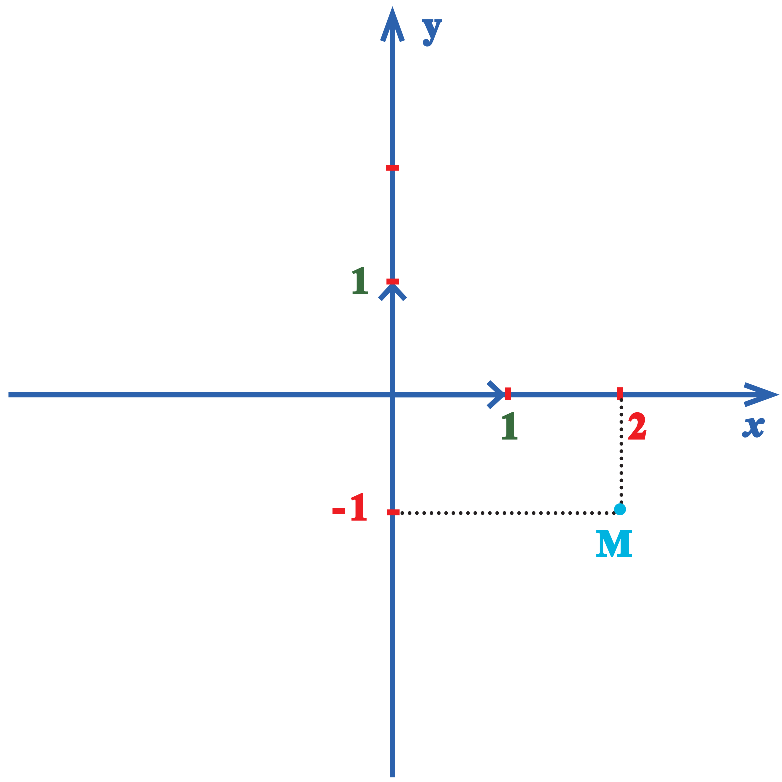
2. Remarque :

On dit que : le point M est l'image de z.

3. Exemple :

Soit $z = 2 - i$, un nombre complexe.

Nous pouvons dire alors :
- z est l'affixe du point M (2 ; -1)
- M (2 ; -1) est l'image de z.



H. Affixe d'un vecteur :

1. Définition :

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe le complexe: $z_B - z_A$.

2. Exemple :

Soit : • $z_A = 3 + 2i$, l'affixe du point A

• $z_B = 2 - 7i$, l'affixe du point B.

Dans ces conditions, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-3 \\ -7-2 \end{pmatrix} \text{ cad } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

I. Propriétés :

1. Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

• Les points A et B sont confondus ssi: $z_A = z_B$.

• Le milieu du segment [AB] a pour affixe: $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

• La distance entre les points A et B est: $AB = | z_B - z_A |$.

2. Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs ayant pour affixe respectives z_u et z_v.

• Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont égaux ssi: $z_u = z_v$.

• Le vecteur $\vec{U} + \vec{V}$ a pour affixe: $z_u + z_v$.

3. Les points M (z) et M' ($\bar{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

J. Comment montrer … ?

Soient quatre points A (z_A), B (z_B), C (z_C) et D (z_D).

1. Deux vecteurs parallèles ou colinéaires :

(AB) // (CD) ssi: $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

2. Trois points alignés :

A, B et C sont alignés ssi: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

3. Deux vecteurs orthogonaux :

(AB) ⊥ (CD) ssi: $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

4. Égalité entre deux longueurs :

la longueur [AB] = la longueur [AC] ssi: $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

5. Triangle ABC isocèle en A :

Le triangle ABC est isocèle en A lorsque la longueur du côté [AB] est égale à la longueur du côté [AC] cad ssi : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.

6. Triangle ABC rectangle en A :

Le triangle ABC est rectangle en A ssi : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

7. Triangle ABC équilatéral direct :

Le triangle ABC est un triangle équilatéral direct ssi :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

8. Quadrilatère ABCD = losange :

Le quadrilatère ABCD est un losange ssi :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ • $|z_B - z_A| = |z_C - z_D|$
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ <=>   • $|z_D - z_A| = |z_C - z_B|$
- $(BD) \perp (CA)$ • $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur.

K. Arguments d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$.

- Il existe des réels θ tels que : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$.

- Les réels θ vérifiant ce système sont appelées **arguments de z.**

2. Coordonnées polaires :

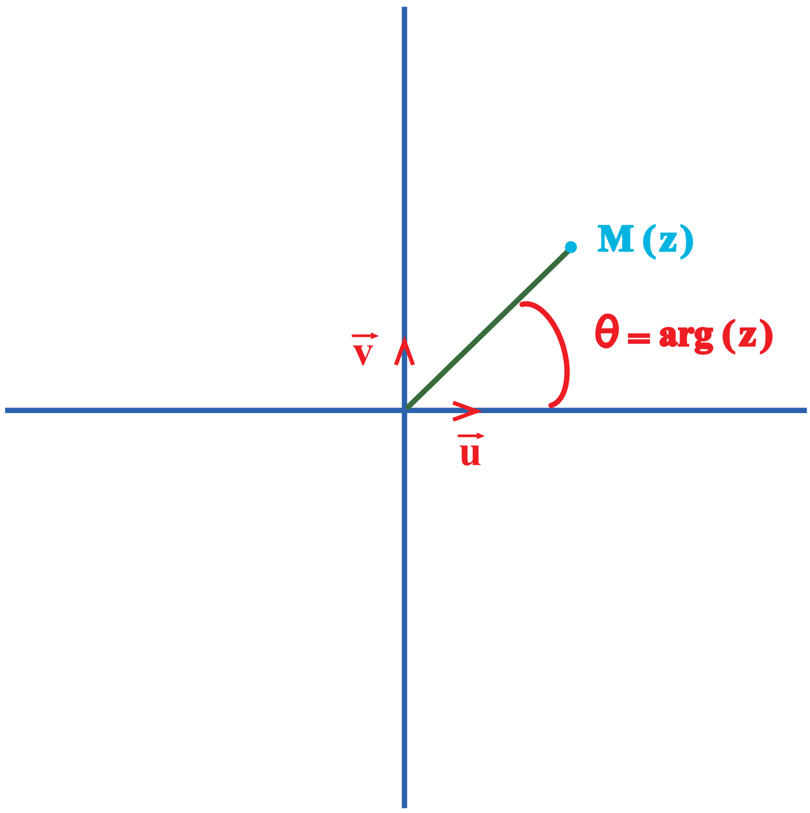
Soit un plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit un point M ($z = x + iy$) distinct de O.

Les coordonnées polaires du point M s'écrivent: ($|z|$; $\arg(z)$).

3. Représentation graphique :

On se place dans un plan complexe d'un repère orthonormé direct ($O ; \vec{u}, \vec{v}$).



4. Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$
- $\arg(-\bar{z}) = -\arg(z) + \pi\ (2\pi)$
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0\ (\pi)$ (z est un réel)

- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} \ (\pi)$ (z est un imaginaire pur)

5. Autres propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ (2\pi)$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \ (2\pi)$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \ (2\pi)$ (avec : $n \in \mathbb{Z}$)

L. Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit z un nombre complexe non nul avec : $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \ (2\pi)$.

La forme trigonométrique de z s'écrit : $z = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

2. Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$z' = z \text{ ssi } \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z) \ (2\pi) \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta \ (2\pi) \end{cases}.$$

M. Formules trigonométriques à connaître :

1. Formules d'addition :

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

2. Autres formules :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

N. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1. Notation si $z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$:

Pour tout réel θ : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

2. Forme exponentielle de $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$:

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument $\arg(z) = \theta \; [2\pi]$:

$$z = r\,e^{i\theta}.$$

O. Formules de Moivre et d'Euler :

1. Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$[r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

ou

$$[r \cdot e^{i\theta}]^n = r^n \cdot e^{in\theta}.$$

2. Formule d'Euler :

Pour tout réel θ : • $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

• $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.