

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Graphes, Matrices, Suites



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# ACHETER SUR INTERNET

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant Internet affirment vouloir continuer à utiliser Internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant Internet.

Dans toute la suite de l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.

On note :

- $a_n$  la probabilité que cette personne fasse son  $n$ -ième achat sur Internet ;
- $b_n$  la probabilité que cette personne fasse son  $n$ -ième achat en magasin.

On suppose de plus que  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$ .

On note  $P_n = (a_n \ b_n)$  l'état probabiliste correspondant au  $n$ -ième achat. Ainsi  $P_1 = (1 \ 0)$ .

On note :

- $A$  l'état : « La personne effectue son achat sur Internet » ;
- $B$  l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets  $A$  et  $B$ .
2. Écrire la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. (a) Calculer la matrice  $M^4$ .  
(b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5<sup>e</sup> achat sur Internet est égale à 0,8125.
4. On note  $P = (a \ b)$  l'état stable associé à ce graphe.  
(a) Montrer que les nombres  $a$  et  $b$  sont solutions du système :
$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$
  
(b) Résoudre le système précédent.  
(c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet ?

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$$

(b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel  $n$  non nul tel que  $a_n \leq 0,801$ .

**Variables :**  $N$  est un entier naturel  
 $A$  est un nombre réel

**Initialisation :** Affecter à  $N$  la valeur 1  
Affecter à  $A$  la valeur 1

**Traitement :** Tant que .....  
    | Affecter à  $A$  la valeur  $0,5 \times A + 0,4$   
    | Affecter à  $N$  la valeur .....

Fin Tant que

**Sortie :** Afficher  $N$

(c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?