

www.freemaths.fr

Maths Expertes

Terminale

Graphes, Matrices, Suites



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ACHETER SUR INTERNET

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant Internet affirment vouloir continuer à utiliser Internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant Internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.

On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat sur Internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son n -ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = (a_n \ b_n)$ l'état probabiliste correspondant au n -ième achat. Ainsi $P_1 = (1 \ 0)$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur Internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. (a) Calculer la matrice M^4 .
(b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5^e achat sur Internet est égale à 0,8125.
4. On note $P = (a \ b)$ l'état stable associé à ce graphe.
(a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :
$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

(b) Résoudre le système précédent.
(c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet ?

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$$

(b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leq 0,801$.

Variables : N est un entier naturel
 A est un nombre réel

Initialisation : Affecter à N la valeur 1
Affecter à A la valeur 1

Traitement : Tant que

Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
Affecter à N la valeur

Fin Tant que

Sortie : Afficher N

(c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?