Maths Expertes
Terminale

La congruence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

La congruence

16

Correction

NB. Rappelons une propriété de la relation de congruence modulo *n*, sa compatibilité avec l'élévation à une puissance (voir «exercice 02 ») :

Si $a \equiv b \ [n]$, alors $a^p \equiv b^p \ [n]$ quel que soit l'entier naturel *p*.

Le présent exercice porte sur l'étude de la suite des restes des divisions euclidiennes des puissances d'un entier *a* par un entier fixé *b* dans diverses situations.

1. Cherchons le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 7 :

Pour cela, nous allons étudier la suite des restes des divisions euclidiennes des puissances de 2 par 7.

Pour tout entier naturel *n*, désignons par r_n le reste de la division euclidienne de 2^n par 7.

- Nous avons d'une part : $2^n \equiv r_n \ [7]$ avec *a priori* $0 \leq r_n < 7$ (mais comme aucune puissance de 2 n'est divisible par 7, r_n ne prend jamais la valeur 0).
- Nous avons d'autre part $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc $r_{n+1} \equiv 2 \times r_n \ [7]$

Etudions les premiers termes de cette suite :

- $2^0 = 1$ donc $r_0 = 1$.
- $2^1 = 2$ donc $r_1 = 2$.
- $2^2 = 4$ donc $r_2 = 4$.
- $2^3 = 8 = 1 + 1 \times 7$ donc $2^3 \equiv 1 \ [7]$ et $r_3 = 1$

La congruence $2^3 \equiv 1 \ [7]$ est stratégique. L'entier 1 est invariant par élévation à une puissance entière (les puissances entières de 1 sont toutes égales à 1). Par compatibilité avec l'élévation à une puissance, nous obtenons que pour tout entier naturel *p* : $(2^3)^p = 2^{3p} \equiv 1 \ [7]$

De la congruence $2^{3p} \equiv 1 \;\; [7]$ nous déduisons les deux autres congruences :

$2^{3p+1} = 2 \times (2^p) \equiv 2 \;\; [7]$ et $2^{3p+2} = 4 \times (2^p) \equiv 4 \;\; [7]$

Nous en déduisons :

- Si *n* est de la forme $n = 3p$, alors $2^n \equiv 1 \;\; [7]$ et $r_n = 1$.
- Si *n* est de la forme $n = 3p + 1$, alors $2^n \equiv 2 \;\; [7]$ et $r_n = 2$.
- Si *n* est de la forme $n = 3p + 2$, alors $2^n \equiv 4 \;\; [7]$ et $r_n = 4$.

Il reste maintenant à savoir quelle est la forme de l'entier 2023 et, pour cela, il nous faut établir la division euclidienne de 2023 par 3.

Une calculatrice nous indique que :

$674 \times 3 \leq 2023 < 675 \times 3$.

Puis que la division euclidienne de 2023 par 3 est : $2023 = 674 \times 3 + 1$

$\frac{2023}{3}$	674.333
$674 \cdot 3$	2022
$2023 = 674 \cdot 3 + 1$	true

2023 est de la forme $3p + 1$, donc $r_{2023} = 2$.

Le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 7 est égal à 2.

2. Déterminons quel est le chiffre des unités de 2^{2023} :

Déterminer le chiffre des unités de 2^{2023} revient exactement à déterminer le reste de la division euclidienne de ce nombre par 10. La question posée est donc tout à fait analogue à la question précédente, au modulo près. Nous allons donc suivre une démarche analogue.

Pour tout entier naturel *n*, désignons par u_n le chiffre des unités de 2^n , qui est aussi le reste de la division euclidienne de 2^n par 10.

- Nous avons d'une part : $2^n \equiv u_n \;\; [10]$ avec *a priori* $0 \leq u_n < 10$ (mais comme les puissances de 2 sont des nombres pairs non divisibles par 10, u_n ne prend jamais la valeur 0 ni de valeur impaire).
- Nous avons d'autre part $\quad 2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc $u_{n+1} \equiv 2 \times u_n \;\; [10]$

Etudions les premiers termes de cette suite (u_n) :

- $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 8$ (les premières puissances de 2 s'écrivent avec un seul chiffre).
- $2^4 = 16 = 1 \times 10 + 6$ donc $2^4 \equiv 6 \ [10]$ et $u_4 = 6$.
- $2^5 = 32 = 3 \times 10 + 2$ donc $2^5 \equiv 2 \ [10]$ et $u_5 = 2$

Il s'agit d'un chiffre des unités que nous avons déjà obtenu : $u_5 = u_1 = 2$.

En suivant, nous obtenons $u_6 = u_2 = 4$ puis $u_7 = u_3 = 8$ puis $u_8 = u_4 = 6$ …
La suite des chiffres des unités des puissances de 2 est périodique de période 4 à partir du rang 1, avec succession indéfiniment de la séquence 2, 4, 8, 6.

Montrons rigoureusement cette périodicité à partir du rang 1. Nous allons démontrer que pour tout entier *n* strictement positif, la relation $u_{n+4} = u_n$ est vérifiée.

Nous avons : $\begin{cases} 2^n \equiv u_n \ [10] \\ 2^{n+4} \equiv u_{n+4} \ [10] \end{cases}$.

Or : $2^{n+4} = 2^4 \times 2^n = 16 \times 2^n$ d'où nous déduisons $2^{n+4} \equiv 6 \times 2^n \ [10]$

Par transitivité : $u_{n+4} \equiv 6u_n \ [10]$

Etudions à l'aide d'un tableau les liens entre deux termes de la suite (u_n) distants de quatre rangs. Nous avons vu que pour *n* strictement positif, u_n prenait l'une ou l'autre des valeurs 2, 4, 6 ou 8.

Si $u_n =$	2	4	6	8
$6u_n =$	12	24	36	48
$6u_n \equiv \cdots \ [10]$	2	4	6	8
$u_{n+4} =$	u_n	u_n	u_n	u_n

Quelles que soient les circonstances, $u_{n+4} = u_n$, ce qui démontre la périodicité de période 4 de la suite des chiffres des unités (à partir de son terme de rang 1).

En conséquence, quel que soit l'entier naturel *p* : $\begin{cases} u_{4p+1} = u_1 = 2 \\ u_{4p+2} = u_2 = 4 \\ u_{4p+3} = u_3 = 8 \\ u_{4p+4} = u_4 = 6 \end{cases}$

Il reste maintenant à savoir quelle est la forme de l'entier 2023 et, pour cela, il nous faut établir la division euclidienne de 2023 par 4.

Nous pouvons écrire : $2023 = 2020 + 3 = 4 \times 505 + 3$; l'entier 2023 est de la forme $4p + 3$ (avec $p = 505$). Le chiffre des unités de 2^{2023} est le même que celui de 2^3.

Le chiffre des unités de 2023 est égal à 8.

3. Cherchons si oui ou non l'entier $5^{40000} - 1$ est divisible par 13 :

Nous allons étudier la suite des restes des divisions euclidiennes des puissances de 5 par 13.

Pour tout entier naturel *n*, désignons par r_n le reste de la division euclidienne de 5^n par 13.

- Nous avons d'une part : $5^n \equiv r_n \ [13]$ avec *a priori* $0 \leq r_n < 13$ (mais comme aucune puissance de 5 n'est divisible par 13, r_n ne prend jamais la valeur 0).
- Nous avons d'autre part $5^{n+1} = 5 \times 5^n$ donc $r_{n+1} \equiv 5 \times r_n \ [13]$

Etudions les premiers termes de cette suite :

- $5^0 = 1$ donc $r_0 = 1$.
- $5^1 = 5$ donc $r_1 = 5$.
- $5^2 = 25 = 1 \times 13 + 12$ donc $r_2 = 12$.
- $5^3 = 5 \times 5^2 \equiv 5 \times 12 \ [13]$. Or $5 \times 12 = 60 = 4 \times 13 + 8$ donc $5^3 \equiv 8 \ [13]$ et $r_3 = 8$.
- $5^4 = 5 \times 5^3 \equiv 5 \times 8 \ [13]$. Or $5 \times 8 = 40 = 3 \times 13 + 1$ donc $5^4 \equiv 1 \ [13]$ et $r_4 = 1$.

De façon analogue à la situation rencontrée dans la question 1, la congruence $5^4 \equiv 1 \ [13]$ est une congruence stratégique. En raison de la compatibilité avec l'élévation à une puissance, elle implique que pour tout entier naturel *p* : $(5^4)^p \equiv 1^p \ [13]$, autrement dit $5^{4p} \equiv 1 \ [13]$

Nous en déduisons que si *n* est un multiple de 4, alors $5^n \equiv 1 \ [13]$. C'est précisément le cas du nombre $40000 = 4 \times 10000$. Nous pouvons affirmer que $5^{40000} \equiv 1 \ [13]$.

Nous obtenons la congruence $5^{40000} - 1 \equiv 0 \ [13]$, ce qui signifie que :

Le nombre $5^{40000} - 1$ est effectivement divisible par 13.

La réponse à la question est : « Oui, c'est vrai ».