Maths Complémentaires Terminale

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA PRODUCTION DE MIEL

CORRECTION

1. a. Recopions et complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

Test $C < 400$	—	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	*
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

* : car comme $411 < 400$ est faux, on s'arrête là et l'algorithme affiche donc $n = 5$.

1. b. Déterminons la valeur affichée à la fin de l'exécution et interprétons:

- La valeur affichée à la fin de l'exécution est: $n = 5$.
- Cela signifie qu'au cours de l'année 2019, 2014 + 5, le nombre de colonies d'abeilles de l'apiculteur dépassera 400 unités.

2. a. Exprimons, pour tout entier naturel n, C_{n+1} en fonction de C_n:

- D'après l'énoncé, $C_0 = 300$ colonies.

- De plus, chaque année l'apiculteur perd 8% des colonies pendant l'hiver et installe 50 nouvelles colonies chaque printemps.

Soient:
- C_{n+1}, une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + (n+1)$,
- C_n, une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + (n)$.

Pour tout entier naturel n, l'estimation " C_{n+1} " est égale à l'estimation " C_n " diminuée de 8% et augmentée de " 50 nouvelles colonies d'abeilles ".

Donc pour tout entier naturel n:

$C_{n+1} = C_n - 8\%\ C_n + 50 \iff C_{n+1} = 0,92\ C_n + 50.$

2. b. Montrons que pour tout nombre entier n, $V_{n+1} = 0,92\ V_n$:

$V_n = 625 - C_n \iff V_{n+1} = 625 - C_{n+1}$

$\iff V_{n+1} = 625 - (0,92\ C_n + 50) \quad (1).$

Or: $V_0 = 625 - C_0 \Rightarrow V_0 = 325$ et $C_n = 625 - V_n$.

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = 625 - (0,92\ [625 - V_n] + 50$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,92\ V_n.$

Par conséquent, (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 325$.

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n$:

- Comme $V_{n+1} = 0,92\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,92)^n, \quad \text{avec:} \quad V_0 = 325.$$

- Par ailleurs, nous savons que: * $V_n = 325 \times (0,92)^n$
  * $C_n = 625 - V_n$.

D'où: $C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n$.

2. d. Nombre de colonies espéré en juillet 2024:

Il s'agit de calculer: C_{10}.

$C_{10} = 625 - 325 \times (0,92)^{10} \Rightarrow C_{10} = 484.$

Ainsi, l'apiculteur possédera environ 484 colonies d'abeilles en juillet 2024.

3. a. Déterminons comment modifier l'algorithme:

Doubler signifie: passer de 300 à 600 colonies.

Il suffit de mettre comme nouvelle ligne L_5:

L'_5	Tant que $C < 600$ faire

3. b. Donnons une réponse à la question de l'apiculteur:

Déterminer le nombre d'années pour atteindre 600 colonies d'abeilles revient à résoudre l'inéquation: $C_n \geqslant 600$.

$$C_n \geqslant 600 \iff 625 - 325 \times (0,92)^n \geqslant 600$$

$$\iff 325 \times (0,92)^n \leqslant 25$$

$$\iff (0,92)^n \leqslant \frac{1}{13}$$

$$\iff n \ln(0,92) \leqslant -\ln(13)$$

$$\iff n \geqslant \frac{-\ln(13)}{\ln(0,92)} \quad \text{car: } 0,92 \in]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,92) < 0$$

$$\Rightarrow n \geqslant 30,7.$$

Nous prendrons $n = 31$ ans car n est un entier naturel.

Donc l'apiculteur devra attendre 31 ans, à savoir 2045, pour voir son nombre de colonies doubler.