Maths Complémentaires Terminale

Limite d’une Suite

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

GENDARMES 3

CORRECTION

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n):

Ici: $U_n = \dfrac{\sin(n)}{1+n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le cours, nous savons que: $\sin(n) \in [-1; 1]$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$

$$\Longleftrightarrow \frac{-1}{1+n^2} \leqslant \frac{\sin(n)}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-1}{1+n^2} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{1+n^2}.$$

Or:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{1+n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$$

2. Concluons:

Comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$, qui est une limite finie, nous pouvons affirmer que:

la suite (U_n) est convergente et converge vers 0.