Maths Complémentaires Terminale

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GENDARMES 12

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a-t-on $n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2$?

$$n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2 \iff n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant n^2 + 4 + 4n$$

$$\iff n^2 - n^2 \leqslant n^2 + 4 - n^2 \leqslant n^2 + 4 + 4n - n^2$$

$$\iff 0 \leqslant 4 \leqslant 4 + 4n$$

$$\iff \frac{0}{4} \leqslant \frac{4}{4} \leqslant \frac{4(1+n)}{4}$$

$$\iff 0 \leqslant 1 \leqslant 1 + n.$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $1 + n \geqslant 1 \geqslant 0$ et donc $n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2$.

2. Déduisons-en que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant U_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$:

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous savons que: $n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2$.

$$n^2 \leqslant n^2 + 4 \leqslant (n+2)^2 \iff \sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{n^2 + 4} \leqslant \sqrt{(n+2)^2}$$

$$\iff n \leqslant \sqrt{n^2+4} \leqslant n+2$$

$$\iff \frac{n}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n^2+4}}{n} \leqslant \frac{n+2}{n}$$

$$\iff 1 \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{n^2+4} \leqslant 1+\frac{2}{n}$$

$$\iff 1 \leqslant U_n \leqslant 1+\frac{2}{n}.$$

Au total, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons bien: $1 \leqslant U_n \leqslant 1+\frac{2}{n}$.

2. Concluons:

Ici, nous avons: $1 \leqslant U_n \leqslant 1+\frac{2}{n}$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Or:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+\frac{2}{n} = 1$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0\right)$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1.$$

Et, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est convergente et converge vers 1.