

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Limite d'une Suite



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Calculons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n) quand $U_n = 5n^2 - 2(-1)^n$:

Ici: $U_n = 5n^2 - 2(-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2 \times (-1) \leq 2 \times (-1)^n \leq 2 \times (1)$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \times (-1)^n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2(-1)^n \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 2 \leq 5n^2 - 2(-1)^n \leq 5n^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 2 \leq U_n \leq 5n^2 + 2.$$

Or: • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 - 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(5 - \frac{2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(5 + \frac{2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

b. Calculons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n) quand $U_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$:

$$\text{Ici: } U_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1} \Leftrightarrow U_n = n^2 - 2n - (-1)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n: -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -(-1)^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \leq n^2 - 2n - (-1)^n \leq n^2 - 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \leq U_n \leq n^2 - 2n + 1.$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 2n + 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

2. Concluons dans les deux cas:

Comme dans les deux cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$, nous pouvons affirmer que:

les suite (U_n) sont toutes les deux **divergentes**.