

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Espérance & Variance



**MINI COURS**

## A. Variables aléatoires :

### 1. Définition d'une variable aléatoire :

Soit  $\Omega$  l'univers cad l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire sur  $\Omega$  est une fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### 2. Définition d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , c'est associer à chaque valeur  $x_i$  prise par  $X$  la probabilité de l'événement  $\{X = x_i\}$ .

On présente la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  sous la forme d'un tableau :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P(X = x_i)$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_n$

### 3. Exemple :

Une urne contient 3 boules : 2 rouges (**R**) et 1 blanche (**B**).

Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer avec remise 3 boules, et  $X$  la variable aléatoire (v. a.) représentant le nombre de boules rouges tirées.

- Les valeurs que peut prendre la v. a.  $X$  sont : 0, 1, 2, 3.

Ainsi,  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a.  $X$  est :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

• **Nous avons:** •  $P(X = 0) = P(BBB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27};$

•  $P(X = 1) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{27};$$

•  $P(X = 2) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{27};$$

•  $P(X = 3) = P(RRR) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$

**Notons que:**  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1.$

• **La loi de probabilité de la v. a. X est:**

$x_i$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

## B. Espérance Mathématique d'une variable aléatoire X:

## 1. Formule :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par

la formule : 
$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i$$

$$\Leftrightarrow E(X) = P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 + P_3 \times x_3 + \dots + P_n \times x_n.$$

## 2. Propriétés :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$

## 3. Interprétation de $E(X)$ :

- L'espérance représente la moyenne des résultats obtenus pour un jeu, lorsqu'on effectue un grand nombre de fois le jeu proposé.
- Un jeu est équitable quand :  $E(X) = 0.$

## 4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$E(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3\right) \Leftrightarrow E(X) = 2.$$

## C. Variance et écart type d'une variable aléatoire $X$ :

### 1. Formule de la variance :

La variance d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

## 2. Propriétés :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(X) \geq 0$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ , si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes
- $V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$ , si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes
- $V(X) = 0$  signifie que  $X$  est une variable certaine.

## 3. Formule de l'écart type :

L'écart type d'une variable aléatoire  $X$  est donné par la formule :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

## 4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$\bullet V(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0^2\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1^2\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2^2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3^2\right) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{126}{27} - [2]^2$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$