Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

9

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[0,5 ; 6]$:

Ici: $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$, pour tout $x \in [0,5 ; 6]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[0,5 ; 6]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0,5 ; 6]$:

$$f'(x) = -2 + \frac{3}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,5 ; 6]$: $f'(x) = -2 + \frac{3}{x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0,5 ; 6]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-2 + \frac{3}{x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant \frac{3}{2}$.

- 2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-2 + \dfrac{3}{x} \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Ainsi: • f est croissante sur $\left[\, 0,5 ; \dfrac{3}{2} \,\right]$,

• f est décroissante sur $\left[\, \dfrac{3}{2} ; 6 \,\right]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$0,5$		$\dfrac{3}{2}$		6
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0,5) \Rightarrow a = 4 + 3 \ln(0,5) > 0$,

• $b = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 2 + 3 \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = -7 + 3 \ln(6) < 0$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[\, \dfrac{3}{2} ; 6 \,\right]$:

Précisons que: sur $\left[\, \dfrac{3}{2} ; 6 \,\right]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a\,;\, b\,]$ ou $I =]\, a\,;\, b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\, 0,5\,;\, 6\,]$, donc sur $[\, \frac{3}{2}\,;\, 6\,]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(6) = -7 + 3\ln(6)$

et: $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

• f est strictement décroissante sur $[\, \frac{3}{2}\,;\, 6\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\, \frac{3}{2}\,;\, 6\,]$.