Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES 8

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-20\,;20]$:

Ici: $f(x) = (-2x + 30)\,e^{0,2x-3}$, pour tout $x \in [-20\,;20]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-20\,;20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-20\,;20]$:

$$f'(x) = (-2) \times (e^{0,2x-3}) + (-2x + 30) \times (0,2e^{0,2x-3})$$

$$= (-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-20\,;20]$: $f'(x) = (-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-20\,;20]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(-0,4x + 4)\,e^{0,2x-3} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 10$ $(e^{0,2x-3} > 0)$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $(-0,4x+4)\,e^{0,2x-3} \geq 0$ cad ssi: $x \leq 10$ $\quad$ ($e^{0,2x-3} > 0$).

Ainsi: • f est croissante sur $[-20\,;\,10]$,

• f est décroissante sur $[10\,;\,20]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-20		10		20
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-20) \Rightarrow a = 70\,e^{-7}$,

• $b = f(10) \Rightarrow b = 10\,e^{-1}$,

• $c = f(20) \Rightarrow c = -10\,e$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $[10\,;\,20]$:

Précisons que: sur $[10\,;\,20]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f\,(a)$ et $f\,(b)$, l'équation $f\,(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\,-20\,;\,20\,]$, donc sur $[\,10\,;\,20\,]$.

• " $k = -2$ " est compris entre: $f\,(20) = -10e$

et: $f\,(10) = 10e^{-1}$.

• f est strictement décroissante sur $[\,10\,;\,20\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f\,(x) = -2$ $(k = -2)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[\,10\,;\,20\,]$.