www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

4

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-2\,;\,4]$:

Ici: $f(x) = (2x+1)\,e^{-2x} + 3$, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-2\,;\,4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

$$f'(x) = (2) \times (e^{-2x}) + (2x+1) \times (-2e^{-2x})$$

$$= -4x\,e^{-2x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$: $f'(x) = -4x\,e^{-2x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-2\,;\,4]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $-4x\,e^{-2x} \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 0$ $\quad (e^{-2x} > 0)$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $-4x\,e^{-2x} \geq 0$ cad ssi: $x \leq 0$ $\quad (e^{-2x} > 0)$.

Ainsi: • f est croissante sur $[-2\,;0]$,

• f est décroissante sur $[0\,;4]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-2		0		4
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(-2) \Rightarrow a = -3e^4 + 3$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = 4$,

• $c = f(4) \Rightarrow c = 9e^{-8} + 3$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-2\,;0]$:

Précisons que: sur $[1\,;6]$, f est même strictement croissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,;b]$ ou $I =]a\,;b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[-2 ; 4]$, donc sur $[-2 ; 0]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-2) = -3e^4 + 3$

et: $f(0) = 4$.

• f est strictement croissante sur $[-2 ; 0]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[-2 ; 0]$.