

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du **TVI**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

2

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-4; 10]$:

Ici: $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)e^{-0,5x}$, pour tout $x \in [-4; 10]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[-4; 10]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-4; 10]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x}) \\ &= (2x^2 - 3x - 14)e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [-4; 10]$: $f'(x) = (2x^2 - 3x - 14)e^{-0,5x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Préalablement, déterminons les racines de l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$.

$$\Delta = (11)^2 > 0.$$

D'où deux solutions: $x' = -2$ et $x'' = 3,5$.

Nous allons donc distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4; 10]$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-2; 3,5] \quad (e^{-0,5x} > 0).$$

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 3x - 14 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \in [-4; -2] \cup [3,5; 10] \\ (e^{-0,5x} > 0).$$

Ainsi: • f est décroissante sur $[-2; 3,5]$,

• f est croissante sur $[-4; -2] \cup [3,5; 10]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-4	-2		3,5		10
f'		+	0	-	0	+
f		↗ b		↘ c		↗ d
	a					

Avec: • $a = f(-4) = 1 - 16 e^2$,

• $b = f(-2) = 1 + 12 e$,

• $c = f(3,5) = 1 - 76 e^{-\frac{7}{2}}$,

• $d = f(10) = 1 - 492 e^{-5}$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-4; -2]$:

Précisons que: sur $[-4; -2]$, f est même **strictement croissante**.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: • f est continue sur $[-4; 10]$, donc sur $[-4; -2]$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(-4) = 1 - 16e^2 < 0$

et: $f(-2) = 1 + 12e > 0$.

• f est strictement croissante sur $[-4; -2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[-4; -2]$.