

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du **TVI**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

16

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[0; \pi]$:

Ici: $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}\cos(x)$, pour tout $x \in [0; \pi]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; \pi]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; \pi]$:

$$f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\sin(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; \pi]$: $f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\sin(x)$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Sur $[0; \pi]$: $f'(x) = \frac{2}{5}(1 + 2\sin(x)) > 0$ car $\sin(x) > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[0; \pi]$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

| | | |
|------|-----|-------|
| x | 0 | π |
| f' | + | |
| f | a | b |

Avec: $\bullet a = f(0) = -\frac{4}{5},$

$\bullet b = f(\pi) = \frac{2\pi + 4}{5}.$

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; \pi]$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: $\bullet f$ est continue sur $[0; \pi]$.

$\bullet "k = 0"$ est compris entre: $f(0) = -\frac{4}{5}$

$$\text{et: } f(\pi) = \frac{2\pi + 4}{5}.$$

- f est strictement croissante sur $[0; \pi]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[0; \pi]$.