

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du **TVI**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

15

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$:

Ici: $f(x) = 2x e^{-x}$, pour tout $x \in [0; +\infty[$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2) \times (e^{-x}) + (2x) \times (-e^{-x}) \\ &= 2(1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0; +\infty[$:

- 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } 2(1-x)e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x \leq 0 \quad (e^{-x} > 0)$$

cad ssi: $x \geq 1$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2(1-x)e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x \geq 0 \quad (e^{-x} > 0)$$

cad ssi: $x \leq 1$.

- Ainsi:
- f est croissante sur $[0; 1]$,
 - f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	a	b	c

Avec: • $a = f(0) = 0$,

• $b = f(1) = 2e^{-1}$,

$$\bullet c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0,2$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$:

Précisons que: sur $[0; 1]$, f est strictement croissante.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: $\bullet f$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc sur $[0; 1]$.

$\bullet "k = 0,2"$ est compris entre: $f(0) = 0$

et: $f(1) = 2e^{-1}$.

$\bullet f$ est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0,2$ ($k = 0,2$) admet bien une unique solution α appartenant à $[0; 1]$.