

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du **TVI**



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

14

## CORRECTION

1. Calculons  $f'(x)$  sur  $[-2; 2]$ :

Ici:  $f(x) = -\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4}$ , pour tout  $x \in [-2; 2]$ .

D'après l'énoncé,  $f$  est dérivable sur  $[-2; 2]$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [-2; 2]$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(e^x - e^{-x}).$$

Ainsi, pour tout  $x \in [-2; 2]$ :  $f'(x) = -\frac{1}{8}(e^x - e^{-x})$ .

2. Étudions le sens de variation de  $f$  et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de  $f$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [-2; 2]$ :

- 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) \leq 0$ .

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{8}(e^x - e^{-x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(e^{-x})$$

cad ssi:  $x \geq -x$  ou encore  $x \geq 0$ .

• 2<sup>e</sup> cas:  $f'(x) \geq 0$ .

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{8}(e^x - e^{-x}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \leq \ln(e^{-x})$$

cad ssi:  $x \leq -x$  ou encore  $x \leq 0$ .

Ainsi: •  $f$  est croissante sur  $[-2; 0]$ ,

•  $f$  est décroissante sur  $[0; 2]$ .

b. Tableau de variation de  $f$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	-2	0	2
$f'$	+	0	-
$f$	$a$	$b$	$c$

Avec: •  $a = f(-2) = -\frac{1}{8}(e^{-2} + e^2) + \frac{9}{4}$ ,

•  $b = f(0) = 2$ ,

•  $c = f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$ .

3. Montrons que l'équation  $f(x) = 1,5$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 2]$ :

Précisons que: sur  $[0; 2]$ ,  $f$  est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I = [a; b]$  ou  $I = ]a; b[$ .

$a$  et  $b$  désignent deux nombres réels de  $I$  avec:  $a < b$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $I$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[-2; 2]$ , donc sur  $[0; 2]$ .

- "  $k = 1,5$  " est compris entre:  $f(2) = -\frac{1}{8}(e^2 + e^{-2}) + \frac{9}{4}$

et:  $f(0) = 2$

- $f$  est strictement décroissante sur  $[0; 2]$ .

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation  $f(x) = 1,5$  ( $k = 1,5$ ) admet bien une **unique solution**  $\alpha$  appartenant à  $[0; 2]$ .