Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

13

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[0;20]$:

Ici: $f(x) = (0,8x + 0,2)\,e^{-0,5x} + 0,03$, pour tout $x \in [0;20]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[0;20]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;20]$:

$$f'(x) = (0,8) \times e^{-0,5x} + (0,8x + 0,2) \times (-0,5e^{-0,5x})$$

$$= (0,8 - 0,4x - 0,1) \times e^{-0,5x}$$

$$= (0,7 - 0,4x) \times e^{-0,5x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0;20]$: $f'(x) = (0,7 - 0,4x) \times e^{-0,5x}$.

2. Études le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0;20]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $0,7 - 0,4x \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant \dfrac{7}{4}$ $\quad (e^{-0,5x} > 0)$.

• 2^e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $0,7 - 0,4x \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant \dfrac{7}{4}$ $(e^{-0,5x} > 0)$.

Ainsi: • f est croissante sur $[\,0\,;\dfrac{7}{4}\,]$ cad $[\,0\,;1,75\,]$,

• f est décroissante sur $[\,\dfrac{7}{4}\,;20\,]$ cad $[\,1,75\,;20\,]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	0		1,75		20
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(0) = 0,23$, $(\approx 23\%)$

• $b = f(1,75) = 0,697$, $(\approx 69,7\%)$

• $c = f(20) = 0,031$. $(\approx 3,1\%)$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 3,5\%$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\,1,75\,;20\,]$:

Précisons que: sur $[\,1,75\,;20\,]$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f\,(a)$ et $f\,(b)$, l'équation $f\,(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • f est continue sur $[\,0\,;\,20\,]$, donc sur $[\,1,75\,;\,20\,]$.

• " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f\,(20) \approx$ **3, 1%**

et: $f\,(1,75) \approx$ **69, 7%**.

• f est strictement décroissante sur $[\,1,75\,;\,20\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f\,(x) = 3,5\%$ ($k = 3,5\%$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\,1,75\,;\,20\,]$.