

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du **TVI**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

10

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur \mathbb{R} :

Ici: $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur \mathbb{R} .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in \mathbb{R}$:

• 1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(e^{-x})$$

cad ssi: $x \geq -x$ ou encore $x \geq 0$.

• 2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \leq \ln(e^{-x})$$

cad ssi: $x \leq -x$ ou encore $x \leq 0$.

Ainsi: • f est croissante sur $] -\infty; 0]$,

• f est décroissante sur $[0; +\infty [$.

b. Tableau de variation de f :

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f			

Avec: • $a = -\infty$,

• $b = \frac{5}{2}$,

• $c = -\infty$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$:

Précisons que: sur $[0; +\infty[$, f est strictement décroissante.

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec: $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: • f est continue sur \mathbb{R} , donc sur $[0; +\infty[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$

$$\text{et: } f(0) = \frac{5}{2} > 0.$$

- f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[0; +\infty[$.