Maths Complémentaires Terminale

Corollaire du TVI

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

1

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ sur $[-10;2]$:

Ici: $f(x) = (2 - x)\,e^x$, pour tout $x \in [-10;2]$.

D'après l'énoncé, f **est dérivable** sur $[-10;2]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-10;2]$:

$$f'(x) = (-1) \times (e^x) + (2 - x) \times (e^x)$$

$$= (1 - x)\,e^x.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-10;2]$: $f'(x) = (1 - x)\,e^x$.

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10;2]$:

- 1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $(1 - x) \leqslant 0$ cad ssi: $x \geqslant 1$ ($e^x > 0$).

• 2ᵉ cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $(1 - x) \geqslant 0$ cad ssi: $x \leqslant 1$ $(e^x > 0)$.

Ainsi: • f est croissante sur $[-10 ; 1]$,

• f est décroissante sur $[1 ; 2]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-10		1		2
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 12\, e^{-10}$,

• $b = e$,

• $c = 0$.

3. Déduisons-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans $[-10 ; 2]$:

Précisons que: • sur $[-10 ; 1]$, f est même strictement croissante.

• sur $[1 ; 2]$, f est même strictement décroissante.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$.

a et b désignent deux nombres réels de I avec : $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Distinguons 2 cas :

1er cas : $x \in [-10 ; 1]$.

Dans ce cas : • f est continue sur $[-10 ; 2]$, donc sur $[-10 ; 1]$.

• " $k = 1$ " est compris entre : $f(-10) = 12e^{-10} < 1$

et : $f(1) = e > 1$.

• f est strictement croissante sur $[-10 ; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ $(k = 1)$ admet bien une unique solution α appartenant à $[-10 ; 1]$.

2e cas : $x \in [1 ; 2]$.

Dans ce cas : • f est continue sur $[-10 ; 2]$, donc sur $[1 ; 2]$.

• " $k = 1$ " est compris entre : $f(2) = 0 < 1$

et : $f(1) = e > 1$.

• f est strictement décroissante sur $[1 ; 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ $(k = 1)$ admet bien une unique solution β appartenant à $[1 ; 2]$.

En définitive : l'équation $f(x) = 1$ admet exactement 2 solutions α et β dans l'intervalle $[-10 ; 2]$.