Maths Complémentaires Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 9

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C e^{ax} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Déterminons a et b pour que " g " soit bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = (ax + b)\, e^{2x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons: $g'(x) = ae^{2x} + 2\,(ax + b)\, e^{2x}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) - 3\,g(x) = 2xe^{2x} \iff (ae^{2x} + 2\,(ax + b)\,e^{2x}) - 3\,((ax + b)\,e^{2x}) = 2xe^{2x}$$

$$\iff a + 2ax + 2b - 3ax - 3b = 2x$$

$$\iff x\,(-a) + (a - b) = 2x.$$

Par identification, nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, " g " est bien une solution particulière de (E) avec:

$$g(x) = -(2x + 2)\,e^{2x}.$$

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' - 3y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $y' - 3y = 0$ sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{3x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' - 3y = 2xe^{2x}$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x)$ cad $h(x) = C \cdot e^{3x} - (2x + 2)\,e^{2x},\ C \in \mathbb{R}.$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que $h(-1) = 6$:

$h(-1) = 6 \iff C \cdot e^{-3} = 6$

$\iff C = 6 \cdot e^{3}.$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(-1) = 6$ est:

$$h(x) = (6e^{3}) \cdot e^{3x} - (2x + 2)\,e^{2x}.$$

Freemaths : Tous droits réservés