

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

Équations **Différentielles**



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# RÉSoudre $y' = ay + f$

5

## CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de  $y' = ay + f$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) sont les fonctions de la forme:  $x \rightarrow C e^{ax} + g(x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

Notons que " $g$ " est une solution particulière de  $y' = ay + f$ .

1. Vérifions que " $g$ " est bien une solution particulière de (E):

Ici:  $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et nous avons:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}g'(x) + g(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x \\ &= x^2 e^x.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ : " $g$ " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation  $y' + y = 0$ :

Les solutions générales de l'équation  $y' + y = 0$  sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{-x}, C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur  $\mathbb{R}$ :

Les solutions générales de  $y' + y = x^2 e^x$  sont:

$$h(x) = h_1(x) + g(x) \text{ cad } h(x) = C \cdot e^{-x} + \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^x, C \in \mathbb{R}.$$

4. Déduisons-en l'unique solution  $h$  de (E) telle que  $h(1) = 3$ :

$$h(1) = 3 \Leftrightarrow C \cdot e^{-1} + \frac{1}{4} e = 3$$

$$\Leftrightarrow C = 3e - \frac{e^2}{4}.$$

Ainsi, l'unique solution  $h$  de (E) telle que  $h(1) = 3$  est:

$$h(x) = \left( 3e - \frac{e^2}{4} \right) \cdot e^{-x} + \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^x.$$