Maths Complémentaires Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 4

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme : $x \rightarrow C\,e^{ax} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici : $g(x) = x\,e^{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons : $g'(x) = e^{x} + x\,e^{x}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) - g(x) = e^{x} + x\,e^{x} - x\,e^{x}$$

$$= e^{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' = y$:

Les solutions générales de l'équation $y' = y$ sont :

$$h(x) = C \cdot e^{x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' = y + e^x$ sont:

$h(x) = h_1(x) + g(x)$ cad $h(x) = C.e^x + x\,e^x$, $C \in \mathbb{R}$.

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que $h(0) = 5$:

$h(0) = 5 \iff C.e^0 + 0 = 5$

$\iff C = 5$.

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(0) = 5$ est:

$$h(x) = 5.e^x + x\,e^x.$$