

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Équations **Différentielles**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSoudre $y' = ay + f$

1

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C \cdot e^{ax} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = -x - 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur \mathbb{R} , et nous avons: $g'(x) = -1$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) - \frac{1}{2}g(x) &= -1 - \frac{1}{2}(-x - 2) \\ &= \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' = \frac{1}{2}y$:

Les solutions générales de l'équation $y' = \frac{1}{2}y$ sont:

$$h_1(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}, C \in \mathbb{R}.$$

3. Dédudions-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur \mathbb{R} :

Les solutions générales de $y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$ sont:

$$h(x) = h_1(x) + g(x) \text{ cad } h(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-x - 2), C \in \mathbb{R}.$$

4. Dédudions-en l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$:

$$h(2) = 0 \Leftrightarrow C \cdot e + (-2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4}{e}.$$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$ est:

$$h(x) = \frac{4}{e} \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x - 2.$$