

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Trigonométrie

Correction

 www.freemaths.fr

COSINUS ET SINUS DE $\frac{7\pi}{12}$?

CORRECTION

1. Rappelons les relations entre $\cos(2x)$ et ... :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

2. Calculons alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

Nous avons :

- $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\pi - \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\bullet \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Or: } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) > 0 \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) > 0.$$

$$\text{Ainsi: } \bullet \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}},$$

$$\bullet \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

$$3. \text{ Montrons que } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} :$$

$$\text{Nous avons: } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Donc: } \bullet \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\bullet \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\blacktriangle \text{ Or: } \cos(x + y) = \cos(x) \times \cos(y) - \sin(x) \times \sin(y).$$

$$\text{D'où: } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Et: } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ **cad** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

▲ Or: $\sin(x + y) = \sin(x) \times \cos(y) + \cos(x) \times \sin(y)$.

D'où: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Et: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ **cad** $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

4. Les résultats des questions 2. et 3. sont-ils égaux ?

Pour répondre à cette question, nous allons tout élever au carré.

$$\begin{aligned} \bullet \left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(2 + 6 - 2\sqrt{12}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(2 + 6 + 2\sqrt{12}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Au total: les résultats sont bien les mêmes.