1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Équations & Inéquations Trigonométriques

Correction

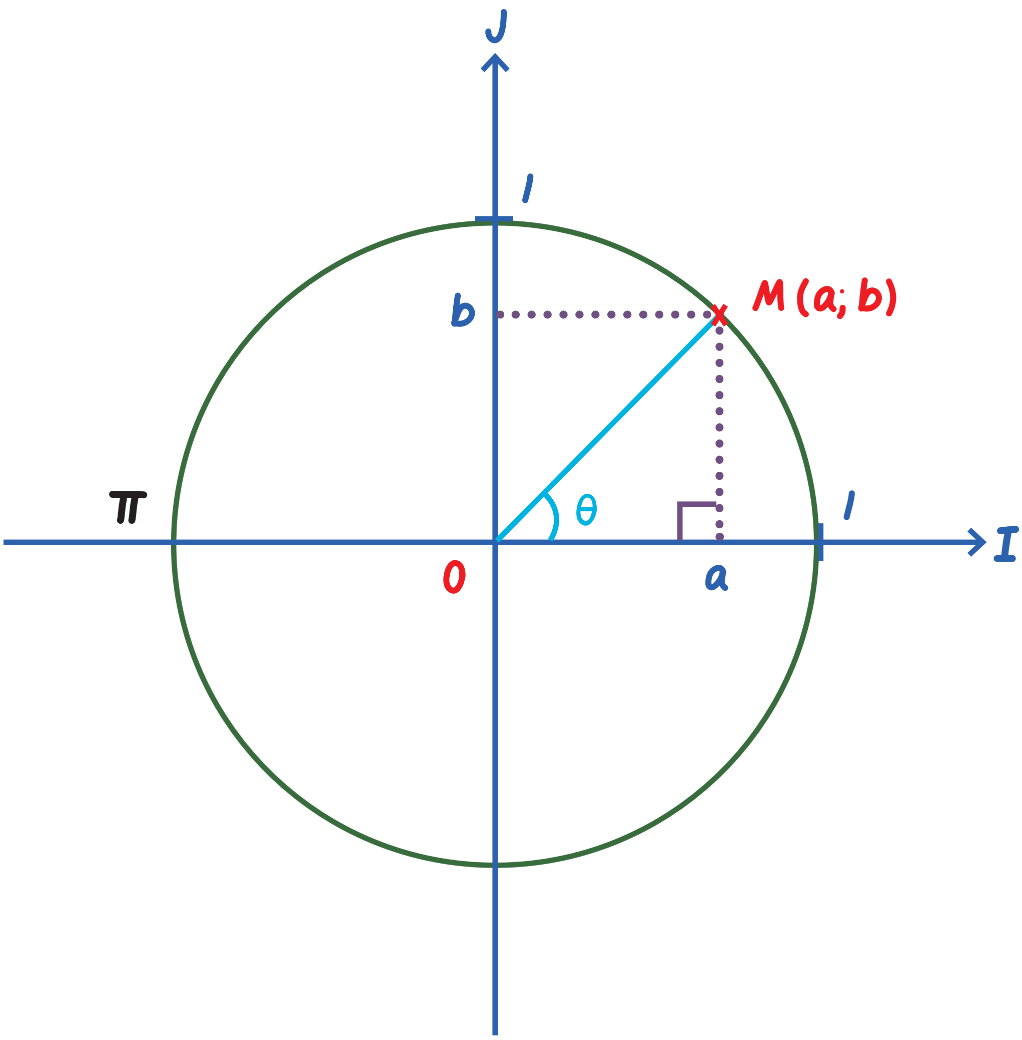
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ET $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ GÉOMÉTRIQUEMENT ...

CORRECTION

1. **Déterminons les coordonnées du point M en fonction de x:**

Soit x un réel, et M son point image sur le cercle trigonométrique: $M(x)$.

Graphiquement, nous avons:



, avec: • $a = \cos(x)$

• $b = \sin(x)$.

- On appelle cosinus de x, et on note **cos (x)**, **l'abscisse du point M**.

- On appelle sinus de x, et on note **sin (x)**, **l'ordonnée du point M**.

2. Que représente " x " pour le point M ?

D'après le cours, on dit que:
- M a pour coordonnées **cos (x)** et **sin (x)**,
- M est le **point image** du réel x,
- **x est l'affixe du point M**.

3. Calculons la longueur OM^2:

Nous sommes en présence d'un cercle trigonométrique de centre O (0; 0) et de rayon $R = 1$.

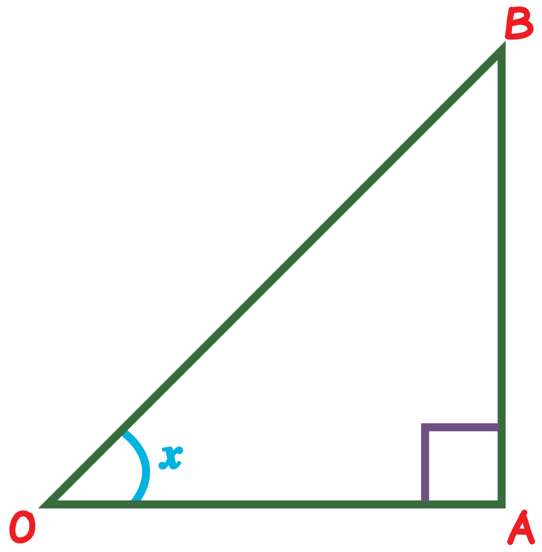
Dans ces conditions: $OM = R$ et $OM^2 = R^2$.

cad: $OM = 1$ et $OM^2 = 1$.

4. Montrons alors que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

D'après le théorème de **PYTHAGORE**:

" **Soit un triangle OAB rectangle en A**: $OA^2 + AB^2 = OB^2$ ".



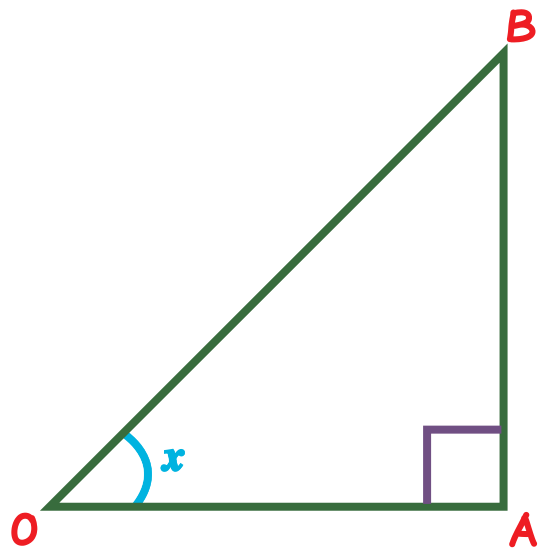
Or ici: $OB = OM = R = 1$.

D'où: $OA = \cos(x)$ et $AB = \sin(x)$.

Ainsi: $OA^2 + AB^2 = OB^2 \iff \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

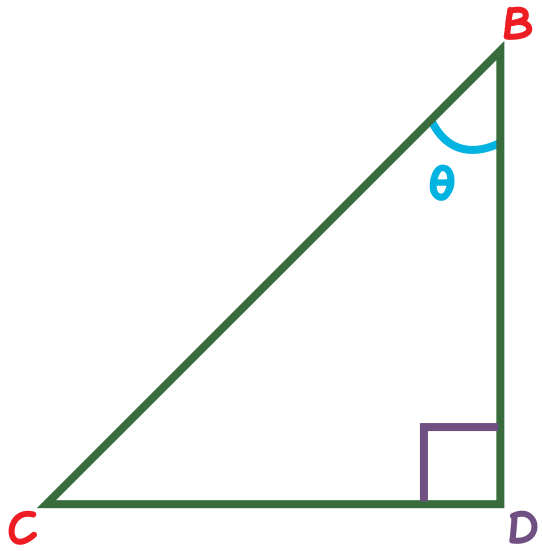
5.a. Déterminons les valeurs exactes de BD, AD et CD:

D'après le cours, soit un triangle OAB rectangle en A:



- $\cos(x) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{OA}{OB}$,
- $\sin(x) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{AB}{OB}$.

Or ici, nous avons le triangle BDC rectangle en D:



Dans ces conditions:
- $\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{BC}$,
- $\sin(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \frac{CD}{BC}$.

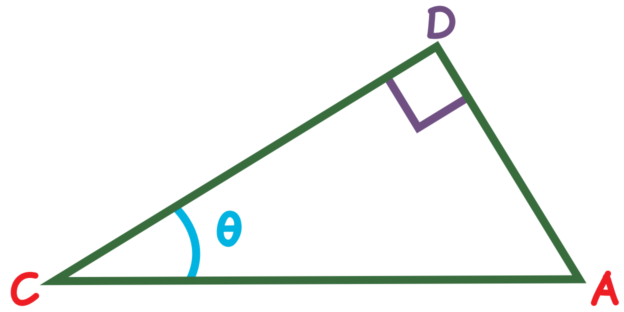
Ainsi:
- $BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC$ cad $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(BC = 1)$

- $CD = \frac{1}{2} \times BC$ cad $CD = \frac{1}{2}$
- $AD = BA - BD$ cad $AD = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(BA = 1)$.

b. Calculons la valeur exacte de AC^2:

Soit le triangle ADC rectangle en D.



D'après le théorème de **PYTHAGORE**: $CD^2 + AD^2 = AC^2$.

Ici, nous avons donc: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = AC^2$ cad $AC^2 = 2 - \sqrt{3}$.

c. Montrons que $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{12}$ rad.:

Nous avons: $\widehat{ACD} = \pi - \widehat{ADC} - \widehat{CAD}$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} \text{ rad.}$$

Ainsi: $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{12}$ rad.

d. Déduisons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

Comme $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{12}$ rad., nous pouvons écrire:

- $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{CD}{AC}$,

- $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{AD}{AC}$.

En définitive: $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.