

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Suites, Synthèse

Correction

 www.freemaths.fr

LES POISSONS DE L'ÉTANG

CORRECTION

1. Montrons que $U(1) = 2926$:

Soit (U_n) la quantité d'eau, en m^3 , contenue dans l'étang le 1^{er} janvier de l'année $2019 + n$.

D'après l'énoncé, l'étang perd chaque année 5% du volume d'eau qu'il avait en début d'année et est naturellement alimenté, au cours de chaque année, par $76 m^3$ d'eau.

De plus, au 1^{er} janvier 2019, l'étang contient $3000 m^3$ d'eau.

Dans ces conditions: • $U(0) = 3000 m^3$ d'eau (2019 = année de base = année 0)

• $U(1) = (3000 - 5\% \times 3000) + 76$ cad $U(1) = 2926 m^3$ d'eau

Ainsi, nous avons bien $U(1) = 2926 m^3$ d'eau ce qui signifie que le 1^{er} janvier 2020, la quantité d'eau contenue dans l'étang sera de : $2926 m^3$.

2. Montrons que, pour tout entier naturel n , $U(n+1) = 0,95 U(n) + 76$:

• D'après l'énoncé, au 1^{er} janvier 2019, l'étang contient $3000 m^3$ d'eau.

D'où: $U(0) = 3000 m^3$ d'eau.

- De plus, chaque année, l'étang perd 5% du volume d'eau **et** est naturellement alimenté par 76 m³ d'eau:

- Soient:
- $U(n+1)$, la quantité d'eau, en m³, contenu dans l'étang le 1^{er} janvier de l'année 2019 + (n + 1),
 - $U(n)$, la quantité d'eau, en m³, contenu dans l'étang le 1^{er} janvier de l'année 2019 + n.

Pour tout entier naturel n , le volume d'eau $U(n+1)$ est égal au volume d'eau $U(n)$ diminué de 5% **et** augmenté de 76 m³.

Donc pour tout entier naturel n :

$$U(n+1) = [U(n) - 5\% \times U(n)] + 76 \iff U(n+1) = 0,95 \times U(n) + 76.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , nous avons bien: $U(n+1) = 0,95 \times U(n) + 76$.

3. a. Déterminons la formule que l'on peut entrer dans la cellule C_2 :

La formule à entrer dans la cellule C_2 est:

En C_2 : on entre $\ll = 0,95 * B_2 + 76 \gg$.

(car: $U(1) = 0,95 \times U(0) + 76$)

3. b. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

D'après le cours, pour tout entier naturel n .

- la forme générale d'une suite arithmétique est $U(n+1) = U(n) + r$.
- la forme générale d'une suite géométrique est $U(n+1) = q \times U(n)$.

Or ici: $U(n+1) = 0,95 \times U(n) + 76$ ce qui ne correspond ni à la forme générale d'une suite arithmétique, ni à la forme générale d'une suite géométrique.

En conclusion, (U_n) n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

(U_n) est une suite dite "arithmético-géométrique".

4. Déterminons à partir de quelle année la quantité d'eau deviendra insuffisante pour la survie des "fish" de l'étang:

D'après l'énoncé, les poissons de l'étang ne peuvent pas survivre en dessous d'un volume d'eau inférieur à 2500 m^3 .

Après calculs, nous avons: $U(8) = 2503 \text{ m}^3$ et $U(9) = 2454 \text{ m}^3 < 2500 \text{ m}^3$:

Ainsi, à partir de $n = 9$ cad à partir de 2028, les poissons de l'étang ne pourront plus survivre.