1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Variables Aléatoires & $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Correction

UN SAC DE JETONS...

CORRECTION

1. Déterminons la probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage:

Le sac contient 3 jetons de couleurs différentes.

Dans ces conditions, la probabilité de tirer un jeton est de: $\frac{1}{3}$.

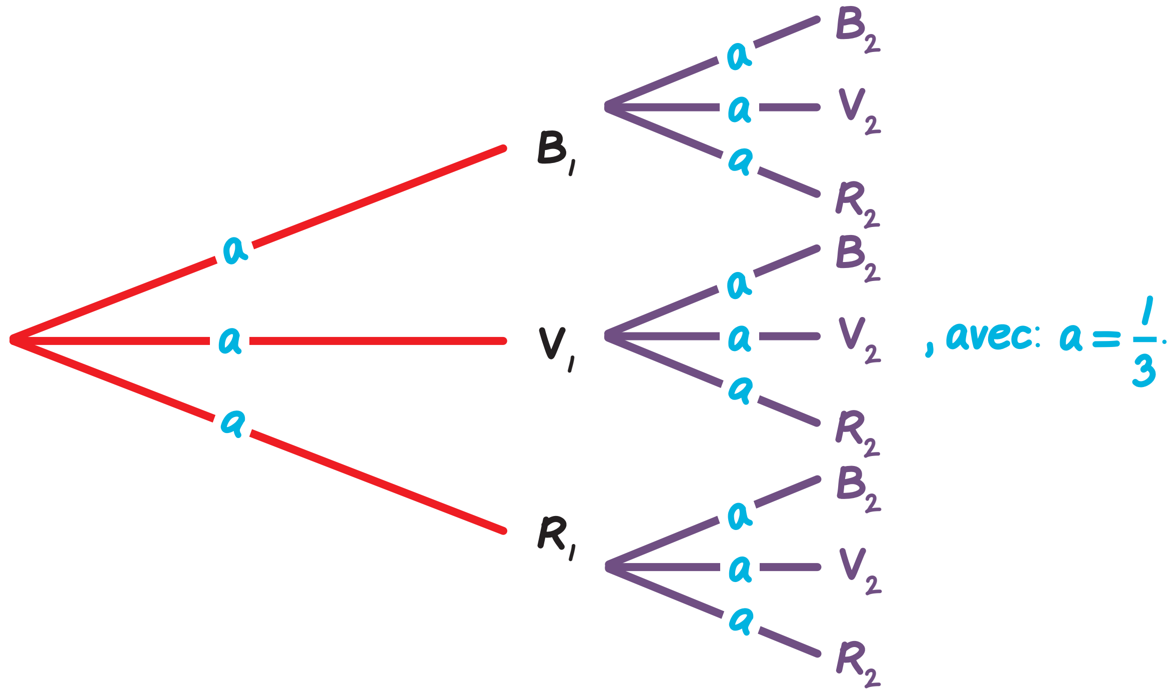
La probabilité de tirer le jeton vert au 1er tirage est donc: $P(V) = \frac{1}{3}$.

2. Illustrons la situation par un arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $B =$ " le jeton tiré est bleu "
  $V =$ " le jeton tiré est vert "
  $R =$ " le jeton tiré est rouge ".
- $P(B) = P(V) = P(R) = \frac{1}{3}$.

D'où la situation illustrée par l'arbre de probabilités suivant:



3. a. Donnons la loi de probabilité de X:

• **Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?**

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par Adam.

D'après l'énoncé, le gain est de 30 points si les deux jetons tirés sont verts et la perte est de 3 points dans le cas contraire.

Nous pouvons distinguer alors 2 cas de figure:

- les deux jetons sont verts: gain = 30 points
- les deux jetons ne sont pas verts: gain = -3 points.

Les valeurs que peut prendre X sont donc: -3 points et 30 points.

Et par conséquent: $X(\Omega) = \{-3 ; 30\}$.

• **$P(X = -3)$ et $P(X = 30)$?**

Nous avons: • $P(X=-3) = P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap B_2) + P(V_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap R_2)$

$$= 1 - P(X=30)$$

• $P(X=30) = P(V_1 \cap V_2)$.

Or: • $P(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = P_{V_1}(V_2) \times P(V_1)$

• $1 - P(V_1 \cap V_2) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Dans ces conditions: $P(X=-3) = \frac{8}{9}$ et $P(X=30) = \frac{1}{9}$.

• **La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc:**

x_i	-3	30
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. b. Calculons l'espérance de X:

D'après le cours: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \times x_i$.

Ici: $E(X) = \left(\frac{8}{9} \times (-3)\right) + \left(\frac{1}{9} \times 30\right)$

$$= \frac{2}{3} \text{ point.}$$

Au total: $E(X) = \frac{2}{3}$ point ce qui signifie qu'en moyenne Adam peut gagner un nombre de point égal à $\frac{2}{3}$.

4. Que penser de cette affirmation ?

Pour répondre à cette question, il suffit de comparer E (X) et E (Y).

Ici: $E(Y) = \left(\frac{1}{3} \times 9\right) + \left(\frac{2}{3} \times (-3)\right)$

$= 1$ point.

Comme $E(Y) > E(X)$: l'affirmation d'Adam est fausse !

En effet: il gagnera globalement plus de points en jouant souvent au second jeu plutôt qu'au premier car $1 > \frac{2}{3}$.