

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Énoncé

👉 www.freemaths.fr

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 8]$ par

$$f(x) = \frac{0,4}{20e^{-x} + 1} + 0,4.$$

1. Montrer que $f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

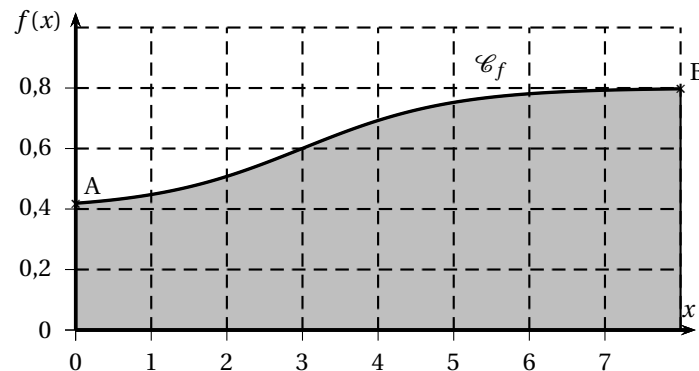
1	$f'(x) := 8 * e^{(-x)} / (20 * e^{(-x)} + 1)^2$ $\rightarrow f'(x) := \frac{8 \cdot e^{-x}}{400 (e^{-x})^2 + 40e^{-x} + 1}$
2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) := \frac{160 (e^{-x})^2 - 8e^{-x}}{8000 (e^{-x})^3 + 1200 (e^{-x})^2 + 60e^{-x} + 1}$
3	$\text{Factoriser}[g(x)]$ $\rightarrow 8e^{-x} \cdot \frac{20e^{-x} - 1}{(20e^{-x} + 1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f , définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».

On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0,05.

Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathcal{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1

L'altitude du village B est 0,6 km.

Proposition 2

L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

Proposition 3

La pente en A vaut environ 1,8 %.