1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Taux de variation
&
Nombre dérivé

Correction

f' QUAND $f(x) = x^2$?

DÉMONSTRATION

Pour le montrer, nous allons procéder en 2 étapes.

Étape 1: calcul du taux de variation entre x et $x + h$.

Ici: $x \in \mathbb{R}$ et $x + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}$

$$= \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) - x^2}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2xh}{h}$$

$$= 2x + h.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est: $\tau(h) = 2x + h$.

Étape 2: calcul de la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0.

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x.$$

D'où: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x$.

Conclusion:

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x$ (nombre réel fini pour tout x): f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.