1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Taux de variation

&

Nombre dérivé

Correction

f' QUAND $f(x) = \frac{1}{x}$?

DÉMONSTRATION

Pour le montrer, nous allons procéder en 2 étapes.

Étape 1: calcul du taux de variation entre x et $x + h$.

Ici: $x \in \mathbb{R}^*$ et $x + h \in \mathbb{R}^*$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left(\frac{1}{x+h}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h) \times x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{-1}{x(x+h)}.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est: $\tau(h) = \frac{-1}{x(x+h)}$.

Étape 2: calcul de la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0.

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x\,(x+h)} = \frac{-1}{x^2}.$$

D'où: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-1}{x^2}.$

Conclusion:

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{-1}{x^2}$ (nombre réel fini pour tout $x \in IR^*$): la fonction f est dérivable sur IR^* et pour tout $x \in IR^*$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$