

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Fonctions Polynômes

Correction

 www.freemaths.fr

LA VEILLE SANITAIRE

CORRECTION

1. a. Déterminons $f'(0)$ par lecture graphique:

D'après l'énoncé: " la droite T est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x = 0$ et passe par le point A de coordonnées $(4; 45)$ ".

Dans ces conditions, par lecture graphique: $f'(0) = \frac{45 - 0}{4 - 0} = 11,25$.

1. b. Déduisons-en l'équation réduite de la tangente T :

La droite T passe par les points $O(0; 0)$ et $A(4; 45)$.

Soit " a " le coefficient directeur de cette droite, " a " est tel que:

$$a = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} \text{ cad } a = \frac{45 - 0}{4 - 0} = \frac{45}{4}$$

Or la droite T a pour équation: $y = a x + b$, d'où: $y = \frac{45}{4} x + b$.

De plus, T passe par le point $O(0; 0)$, d'où: $0 = \frac{45}{4} \times 0 + b$ cad $b = 0$.

Ainsi, une équation réduite de la tangente T est: $y = \frac{45}{4} x$.

2. a. Calculons $f'(t)$:

La fonction f est dérivable sur $[0; 11]$, avec: $f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t$. ²

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[0; 11]$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -3t^2 + 21t + \frac{45}{4} \\ &= -3 \left(t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f , pour tout $t \in [0; 11]$ est:

$$f'(t) = -3 \left(t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right).$$

2. b. b1. Montrons que pour tout $t \in [0; 11]$, $f'(t) = -3 \left(t + \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{15}{2} \right)$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } t \in [0; 11]: \quad -3 \left(t + \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{15}{2} \right) &= -3 \left(t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \right) \\ &= -3 \left(t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right) \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0; 11]$, nous avons bien: $f'(t) = -3 \left(t + \frac{1}{2} \right) \left(t - \frac{15}{2} \right)$.

2. b. b2. Étudions le signe de $f'(t)$ et déduisons-en le tableau de variation de f :

Distinguons 3 cas: $\bullet f'(t) > 0$ ssi $t \in [0; \frac{15}{2}[$

$\bullet f'(t) = 0$ ssi $t = \frac{15}{2}$

$\bullet f'(t) < 0$ ssi $t \in]\frac{15}{2}; 11]$

Ainsi le signe de f' sur $[0; 11]$ est:

- strictement positif sur $[0; \frac{15}{2}[$
- nul si $t = \frac{15}{2}$
- strictement négatif sur $] \frac{15}{2}; 11]$.

Et le tableau de variation de f sur $[0; 11]$ est le suivant:

t	0	$\frac{15}{2}$	11
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	a	b	c

- , avec:
- $a = f(0) = 0$
 - $b = f\left(\frac{15}{2}\right) = 253, 125$
 - $c = f(11) = 63, 25$.

3. Déduisons-en le nombre maximal de malades:

La fonction f est croissante sur $[0; \frac{15}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{15}{2}; 11]$.

Elle présente donc un maximum quand: $t = 7, 5$ jours.

$$f(7, 5) = b = 253, 125 \times 1000 \text{ malades.}$$

Ainsi, c'est au bout de 7 jours et demi que le nombre de malades sera maximal, et ce dernier sera égal à 253 125.