1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Correction

www.freemaths.fr

EXERCICE 4

[Polynésie 2018]

Partie A:

1. **Déterminons graphiquement la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A:**

La quantité de produit B dépasse celle de produit A dès que la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Or cela se produit quand: $x \in]\, 5\, ;\, 6\, [$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 5,3 \text{ mois.}$$

Au total, la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A est d'environ: 5, 3 mois.

2. **Déterminons au bout de combien de mois la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte par le produit B:**

La quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B quand: $g(x) = 3000$.

Or cela se produit quand: $x \in]\, 12\, ;\, 13\, [$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 12,7 \text{ mois.}$$

Au total, la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B au bout d'environ: 12, 7 mois.

Partie B:

1. a. Déterminons ce que modélise cette fonction:

Comme $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(x)$ représente la quantité totale de produit A et de produit B fabriquées par l'usine.

1. b. Montrons que, pour tout $x \in [0; 14]$, $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$:

Ici: • $f(x) = 2000\, e^{-0,2x}$

• $g(x) = 15x^2 + 50x$

• $Df = Dg = [0; 14]$.

f et g sont toutes deux dérivables sur $[0; 14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' et g' sur $[0; 14]$.

Pour tout $x \in [0; 14]$:

• $f'(x) = -0,2 \times 2000 \times e^{-0,2x}$

$= -400\, e^{-0,2x}$;

• $g'(x) = 30x + 50$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; 14]$: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

cad: $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$.

2. a. a1. Montrons que sur [0; 14], l'équation h'$(x) = 0$ admet une solution unique α:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur [a; b].

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de [a; b] tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à [a; b].

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur [a; b], l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à [a; b].

Ici:
- h' est continue sur [0; 14].
- " k = 0 " est compris entre: h' (0) = -350
  et: h' (14) ≈ 446.
- h' est strictement croissante sur [0; 14].

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation h'$(x) = 0$ (k = 0) admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [0; 14].

Au total: h'$(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur [0; 14].

2. a. a2. Donnons un encadrement d'amplitude 0, 1 de α:

Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \in [\, 4,1 \,;\, 4,2 \,]$.

Au total, un encadrement d'amplitude 0, 1 de α est: $4,1 \leqslant \alpha \leqslant 4,2$.

2. b. Déduisons-en les variations de la fonction h sur $[\, 0 \,;\, 14 \,]$:

D'après les questions précédentes, nous pouvons en déduire que:

- h est strictement décroissante sur: $[\, 0 \,;\, \alpha \,[$, car $h'(x) < 0$,
- h est strictement croissante sur: $]\, \alpha \,;\, 14 \,]$, car $h'(x) > 0$,
- h admet un minimum au point: $M\,(\alpha \,;\, h\,(\alpha))$.