

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Études de Fonctions

Énoncé

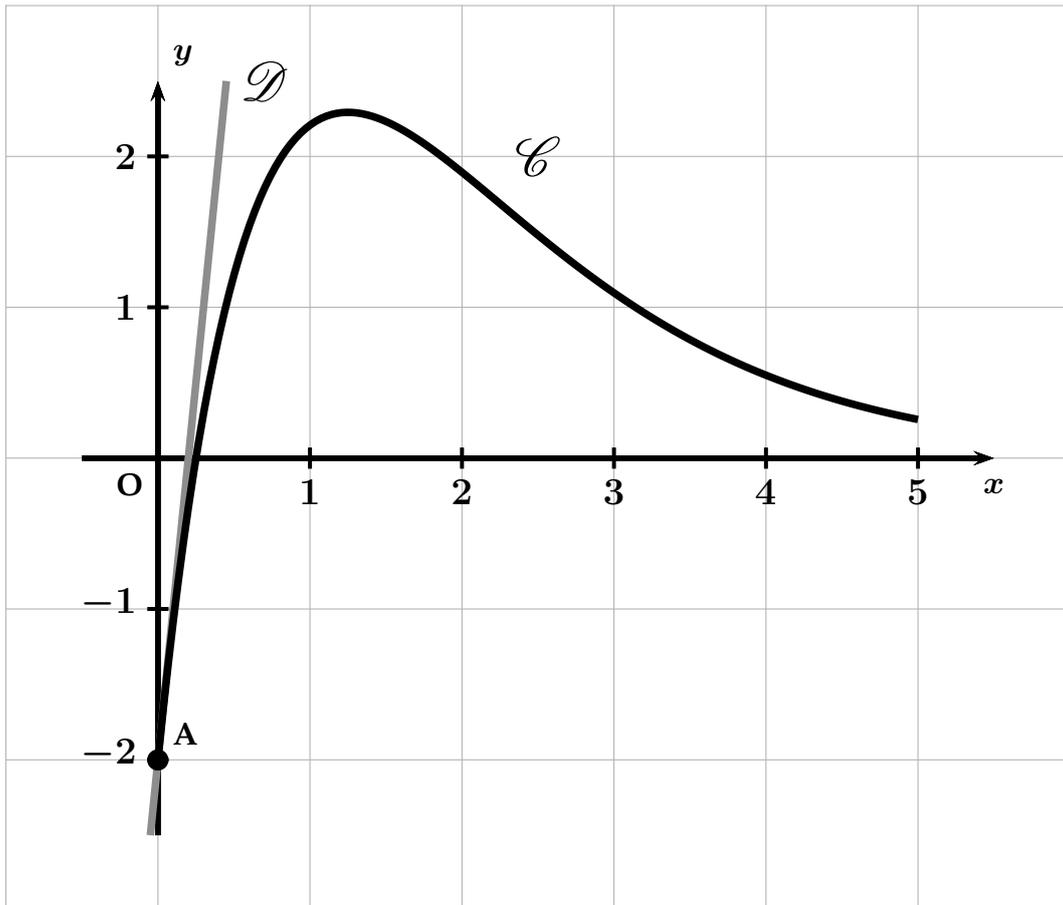
 www.freemaths.fr

FUNCTION

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax - 2)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O .



Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} passent toutes les deux par le point $A(0; -2)$.

La droite \mathcal{D} est tangente à la courbe \mathcal{C} au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier, les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)e^{-x}$$

b) Dédire des questions précédentes que $a = 8$.

c) Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x .

3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$. On pourra faire un tableau.
 b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
 c) Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10) e^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

- a) Donner l'expression de f'' , fonction dérivée seconde de la fonction f .
 b) Justifier que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[1;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2) e^{-x}$$

- a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
 b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
 On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.