

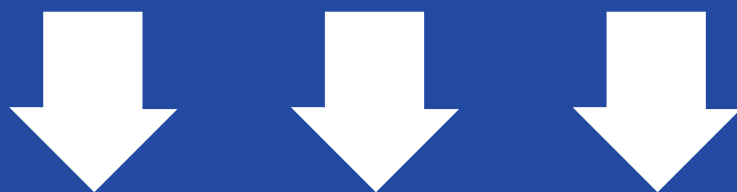
www.freemaths.fr

1<sup>re</sup>

# Technologique Mathématiques

(STI2D et STL)

**Fonctions  
Cosinus & Sinus**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## EXERCICE 4

[ France Métropolitaine 2016 ]

1. Exprimons  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  en fonction de  $x$ :

a.  $\tan \alpha$ :

D'après l'énoncé,  $\tan \alpha = \tan(\widehat{ETA})$ .

$$\text{Or: } \tan(\widehat{ETA}) = \frac{EA}{ET} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{25}{x}.$$

b.  $\tan \beta$ :

D'après l'énoncé,  $\tan \beta = \tan(\widehat{ETB})$ .

$$\begin{aligned} \text{Or: } \tan(\widehat{ETB}) &= \frac{EB}{ET} \\ &= \frac{EA + AB}{ET} \Rightarrow \tan \beta = \frac{30,6}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } \tan \alpha = \frac{25}{x} \text{ et } \tan \beta = \frac{30,6}{x}.$$

2. Montrons que la fonction  $\tan$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ :

$$\text{Ici: } \bullet f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\bullet Df = ]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Posons: } f = \frac{f_1}{f_2}, \text{ avec: } f_1(x) = \sin x \text{ et } f_2(x) = \cos x.$$

$$f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables sur } ]0; \frac{\pi}{2}[$$

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  comme quotient  $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$  de 2 fonctions dérivables sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , avec: pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $f_2(x) \neq 0$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

$$\text{Pour tout } x \in ]0; \frac{\pi}{2}[ : f'(x) = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \times \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x = 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Au total: pour tout  $x \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

De plus comme sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $\cos^2 x > 0$ , nous pouvons dire que:  
 $f'(x) > 0$  et donc  $f$  est strictement croissante.

3. Montrons que  $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ :

D'après la relation de Chasles sur les angles:  $\widehat{ETA} + \widehat{ATB} = \widehat{ETB}$ .

D'où:  $\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha$ .

Dans ces conditions:  $\tan \gamma = \tan(\beta - \alpha)$

$$\left( \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \right) \quad = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \times \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \left(\frac{30,6}{x}\right) \left(\frac{25}{x}\right)}$$

$$= \frac{(30,6 - 25) \times x}{x^2 + (30,6)(25)}$$

$$\Rightarrow \tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

Au total, nous avons bien:  $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ .

4. a. Montrons que  $\gamma$  maximal correspond à un minimum de  $f$  sur  $]0;50]$ :

$\gamma$  est maximal quand  $\tan \alpha$  est maximale, car la fonction  $\tan$  est strictement croissante sur  $]0;50]$ .

Donc  $\gamma$  est maximal quand  $\frac{1}{\tan \gamma}$  minimale cad  $\frac{1}{\frac{5,6x}{x^2 + 765}} = \frac{x^2 + 765}{5,6x}$ .

Ou encore:  $\left(x + \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$  minimale.

Cela revient à dire que:

$\gamma$  est maximal quand la fonction  $f(x) = x + \frac{765}{x}$  est minimale.

4. b. Montrons qu'il existe une unique valeur de  $x$  telle que  $\tan \gamma$  soit maximale et déterminons cette valeur de  $x$ :

• Étape 1: calculons  $f'$ .

Ici: •  $f(x) = x + \frac{765}{x} = \frac{x^2 + 765}{x}$

•  $Df = ]0;50]$

Posons:  $f = \frac{f_1}{f_2}$ , avec:  $f_1(x) = x^2 + 765$  et  $f_2(x) = x$ .

$f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  comme fonctions polynômes, donc dérivables sur  $]0;50]$ .

Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $]0;50]$  comme quotient  $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$  de 2 fonctions dérivables sur  $]0;50]$ , avec: pour tout  $x \in ]0;50]$ ,  $f_2(x) \neq 0$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in ]0;50]$ .

$$\text{Pour tout } x \in ]0;50]: \quad f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 765) \times (1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}.$$

• **Étape 2: déterminons le signe de  $f'$ .**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout  $x$  de  $]0;50]$ .

• **1<sup>er</sup> cas:**  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} = 0, \quad \text{cad:} \quad x = \sqrt{765}.$$

• **2<sup>eme</sup> cas:**  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} < 0, \quad \text{cad:} \quad x < \sqrt{765}.$$

• **3<sup>eme</sup> cas:**  $f'(x) > 0$ .

$$f'(x) > 0 \quad \text{ssi} \quad 1 - \frac{765}{x^2} > 0, \quad \text{cad:} \quad x > \sqrt{765}.$$

• **Étape 3: dressons le tableau de variation de  $f$ .**

Nous avons le tableau de variation suivant:

|      |   |              |    |   |
|------|---|--------------|----|---|
| $x$  | 0 | $\sqrt{765}$ | 50 |   |
| $f'$ |   | -            | 0  | + |
| $f$  |   |              |    |   |

Avec: " m " correspond donc à la valeur minimale de f.

$$\begin{aligned} \text{Notons que: } m = f(\sqrt{765}) &\Rightarrow m = \frac{765 + 765}{\sqrt{765}} \\ &\Rightarrow m = 2\sqrt{765}. \end{aligned}$$

• **Étape 4: détermination de x.**

Comme nous l'avons dit:  $\gamma$  est maximal quand  $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$  est minimale.

Or,  $\left(x \times \frac{765}{x}\right) \times \frac{1}{5,6}$  est minimale quand:  $x = \sqrt{765}$ .

$$\text{Et dans ce cas: } \tan \gamma = \frac{5,6}{f(\sqrt{765})}$$

cad:  $\tan \gamma = 0,10$ , à 0,01 près.

**En résumé:**

- il existe une unique valeur de x par laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et cette valeur de x est:  $x_{\min} = \sqrt{765}$ ,
- l'angle  $\widehat{ATB}$  est alors maximum et égal à:  $\tan \gamma = 0,10$ .